

Mittheilungen über die Bodenverhältnisse in Wien.

Von Ober-Ingenieur **Franz Berger.**
(Mit Zeichnungen auf Blatt 25 und 27.)

Die Kenntniss der Bodenverhältnisse einer Stadt ist nicht nur für den Hochbau-Techniker wegen des Einflusses auf die Fundirungsweise von grossem Interesse; sie ist von weit höherer Bedeutung für den Sanitäts-Techniker, welchem die wichtige Aufgabe zufällt, den Boden einer Stadt rein zu halten oder rein zu machen.

Es soll daher keine Gelegenheit, welche einen Aufschluss über die Bodenverhältnisse zu geben geeignet ist, verabsäumt werden und soll durch Sammlung der betreffenden Daten das Bild des Untergrundes einer Stadt immer mehr und mehr vervollständigt werden.

Wir haben deshalb in den letzten Jahren bei allen in Wien geführten Canalbauten, bei welchen der Boden oftmals auf sehr lange Strecken in beträchtlicher Tiefe aufgeschlossen wurde, genaue Aufzeichnungen über die vorkommenden Bodenverhältnisse geführt und sollen die bisherigen Beobachtungen zur Benützung für die Fachgenossen hiermit mitgetheilt werden.

In früherer Zeit hat man sich allerdings bei Erbauung von Unrathscanälen in der Regel damit begnügt, dass man mit den Canälen dem natürlichen Strassengefälle folgend, dieselben in sehr geringen Tiefen, oftmals mit einer Sohlenlage von nur 2—2.5^m unter dem Strassenniveau anlegte, obwohl das Terrain eine weit tiefere Anlage gestattet hätte. Die Folge dieser auf übel angewendeter Oekonomie basirten Bauweise ist, dass man nur selten in die Lage kommt, die Keller, respective die in diesem Geschoße angelegten Localitäten zu entwässern. Wenn man auf einer Karte von Wien durch Schichtencurven von 5 zu 5^m die Höhenlage der Sohle der Keller und jene der Canäle darstellt, so kann man sofort jene ausgedehnten Districte erkennen, in welchen eine directe Entwässerung der Kellerlocalitäten nicht möglich ist.

Es ist dies ein Uebelstand, mit dem man sich schliesslich befreunden musste. Als aber in Folge des Ausbaues der Hochquellenleitung die Hausbrunnen fast ganz ausser Gebrauch gesetzt worden sind und das im Untergrunde vorfindliche Wasser nur mehr im geringen Maasse gehoben wurde, trat gar bald ein sehr bedenkliches Steigen des Grundwassers ein.

Kellerräumlichkeiten, die stets trocken und benutzbar waren, wurden vom Grundwasser überschwemmt und es stieg dasselbe in den Mauern, den Gesetzen der Capillarität folgend, auf und durchfeuchtete das Mauerwerk in den ebenerdigen Wohnungen. Diese Erscheinungen haben die städtische Verwaltung schon seit mehreren Jahren bewogen, eine Senkung des Grundwasserspiegels dadurch zu bewirken, dass man die Unrathscanäle möglichst tief anlegte, und mit Drainröhren ausstattete, und man hat hiebei als Grundsatz aufgestellt, dass die Tiefenlage in der Regel eine solche sein solle, dass man die Keller bequem entwässern könne.

Hierdurch ist die städtische Bauverwaltung in die Lage versetzt worden, eine Reihe tief liegender Canäle zu erbauen und man hat wie vor erwähnt, diese günstige Gelegenheit nicht vorüber gehen lassen, ohne die Bodenformation hierbei eingehend zu studiren und geologische Profile zu sammeln. Wir können gegenwärtig eine Reihe solcher Profile, die Frucht zweijähriger Thätigkeit vorführen und da nun fortan die Erhebungen in gleicher Weise fortgesetzt werden, so werden wir nach einer Reihe von Jahren ein ziemlich genaues Bild über die Bodenverhältnisse in Wien erlangen.

Bevor die Details der bisher aufgenommenen geologischen Profile näher besprochen werden, sollen mit Beziehung auf die ausgezeichneten Darstellungen des Professors Eduard Suess, Felix Karrer u. A., einige allgemeine Bemerkungen über die Bodenverhältnisse von Wien vorausgeschickt werden. Wien liegt nicht zwischen zwei selbstständigen Gebirgszügen, sondern in den Alpen selbst zwischen der Centralkette und der Grauwackenzone einerseits und der Sandsteinzone andererseits auf dem Gebiete der eingesunkenen Kalksteinzone. Die Tiefe dieser eingesunkenen Zone ist uns nicht bekannt, denn es haben die tiefsten Bohrungen (artesischer Brunnen am Getreidemarkte 205.8^m) dieselbe noch lange nicht erreicht.

Die Stadt Wien liegt auf der ausfüllenden Masse und wenn man von der die Oberfläche im allgemeinen bedeckenden Schuttschichte absieht, so ergeben sich folgende Schichtungen:

Das Alluvialgebiet der Donau, welches bis an den Steilrand reicht, der sich vom Leopoldsberge gegen die Nussdorferlinie, Dittrichsteingarten, Thurgasse, Berggasse, Salzgries, Franz-Josef-Kaserne hinzieht. Hier vereinigen sich die Alluvionen der Donau mit jenen des Wienflusses, es zeigt sich aber der unterbrochene Steilrand wieder zwischen der Marxergasse und Landstrasser Hauptstrasse und zieht sich dann an der Erdbergerstrasse gegen das Schlachthaus St. Marx und im weiteren Verlaufe in Simmering gegen die Hauptstrasse hin.

Bis an diesen Steilrand reichen die Alluvionen der Donau; sie bestehen aus Schlamm (Silt), Sand und Schotter. Der Abhang des Steilrandes selbst besteht aus Lehm (Löss) und dann diluvialen Schotter, ersterer braungelb und sehr kalkreich mit Neigung in senkrechten Wänden abzustürzen, letzterer fast ausschliesslich aus Sandstein-Geschiebe bestehend. Die diluvialen Schichten, welche sich gegen das Marchfeld ausbreiten, sind durch das Alluvialgebiet der Donau unterbrochen.

Diese Alluvialbildungen liegen in unserem ganzen Gebiete auf blauem, tertiären Tegel.

Die Bildungen der Tertiär-Zeit (miocänen Schichten) umfassen von oben nach unten gerechnet folgende Gruppen:

Die Süsswasser-Gruppe, bestehend aus sog. Belvedere-Sand und Belvedere-Schotter, gelb und gelbrothes flaches Quarzgeschiebe, zuweilen rothen Thon enthaltend, dann blauer Tegel (Inzersdorfer oder Congerientegel) und blaue Sande und Sandsteinknollen mit Pflanzenabdrücken.

Die sarmatische Gruppe enthält Cerithiensand und Cerithiensandstein, gelb oder sonst licht gefärbt, blattelig; dann blauer Tegel (Hernalser oder sarmatischer Tegel).

Die marine Gruppe (jüngere Mediterranstufe), bestehend aus Gerölle, in der Regel zu festen Massen verbundene Conglomerate, dann fester lichtgelber Kalkstein, der Nulliporen- oder Leithakalk, ferner lichtgelber Sand und endlich Tegel (Badener oder mariner Tegel).

Die Schichten ruhen immer auf älteren, keineswegs aber stets auf der nächst älteren Schichte. Belvedere-Sand und Schotter findet sich in Wien immer auf Inzersdorfer Tegel lagernd. Es kommt häufig vor, dass diluviale Bildungen unmittelbar auf Inzersdorfer Tegel liegen.

Auch kommt es vor, dass die ganzen diluvialen Schichten abgeschwemmt sind und dann das Alluvium auf der mehr genannten Tegelschichte liegt, was wie schon erwähnt im Donaugebiete der Fall ist.

Bei der Erbauung der Nordwestbahnbrücke und der Staatseisenbahnbrücke bei Stadlau hat man über die Tiefenlage der Tegelschichte der tertiären Formation (Congerientegel) im Donaugebiete interessante Bestimmungen erhalten.

Nach den diesfälligen Bohrungen und den bei den Pfeilerbauten selbst gemachten Messungen liegt die feste Tegelschichte bei der Nordwestbahnbrücke am rechten Donauufer 11.93^m, am linken Ufer 9.98^m unter dem örtlichen Nullwasser. Darüber lagert Alluvium aus Wellsand, Sand und Schotter in Schichten abwechselnd.

Bei den Bohrungen für den Bau der Staatseisenbahnbrücke fand man in einer verglichenen Tiefe von 7.4^m unter örtlich Null Wellsand, Silt, dann Sand und Schotter. Bis auf die Tiefe von 12.6^m fand man weiter gelben Tegel mit viel feinem Sand. Bei durchschnittlich 12.9^m ist man auf eine dunkelblau gefärbte Tegelschichte gestossen, dann erst fand man den festen Congerientegel u. zw. bei der wirklichen Bauausführung am rechten Ufer 16.0^m, in der Strommitte 13.0^m und am linken Ufer 9.0^m unter Null.

Man hat eine Bohrung bis auf die bedeutende Tiefe von 47.4^m fortgesetzt und hat hierbei die Tegelschichte nicht durchbohrt.

Diese Tegelschichte (Inzersdorfer oder Congerientegel) bildet bis in einer beträchtlichen Tiefe den Untergrund von Wien.

Bei jeder tieferen Bohrung hat man sie erreicht und nur selten durchbohrt. Solche Durchbohrungen haben bei einigen Brunnen am linken Wienflussufer im Bezirke Mariahilf stattgefunden, wo man bis in die brakischen Schichten eingedrungen ist.

Die erste Tegelschichte ist als wasserdicht anzusehen, alle darüber liegenden Schichten: Schuttdecke, die alluvialen und diluvialen Bildungen und die Belvedere-Schichten sind in der Regel durchlässig.

Das Relief der Tegelschichte, welches in Bezug der Grundwasserfrage von Wien eine wichtige Rolle spielt, weicht oft wesentlich von der Gestalt der Bodenoberfläche ab. Es lässt sich jedoch auch eine tiefer liegende mehr ebene Tegelfläche und eine höhere, unebene Fläche erkennen.

Dieselben sind auf eine bedeutende Strecke durch eine steilere Abstufung getrennt, welche sich von der Josefstädter, Buchfeldgasse und Lenaugasse unterhalb der Hofstallungen gegen die Elisabethbrücke, ohne dieselbe zu berühren, zur Fichtegasse hinzieht, den Wienfluss kreuzt und durch den ehemaligen Metternichpark, in der Nähe des Verbindungsbahn-Tunnels am Rennweg zur Artilleriekaserne verläuft.

Im I. Bezirke besteht aber eine partielle halbmondförmige Erhebung in der Richtung Schottenthor, Hofburg, Seilerstätte.

Der eben beschriebene Tegelsteilrand begrenzt den Einfluss der Donau auf das Grundwasser, der halbmondförmige Rücken ragt wie eine Insel empor.

Die Auskeilungslinien der drei Tegelschichten der tertiären Bildungen verlaufen sehr unregelmässig und sind noch nicht vollständig bestimmt.

In der Nähe der Auskeilungslinie des Congerientegels fand eine sehr interessante Brunnengrabung statt. Es ist dies die im Jahre 1874 ausgeführte Grabung im neuen Administrationsgebäude am Westbahnhof in Fünfhaus. Man hat dort in einer Tiefe von 2.50^m Löss und in der Tiefe von 5.7^m den Congerientegel gefunden, anfänglich grau, in den tieferen Lagen blau gefärbt. Der Brunnen ist bis auf eine Tiefe von 27.9^m (Cote 24.5^m über Ferdinands-Pegel) gegraben worden, ohne dass man das Ende der Tegelschichte erreicht hätte. Zwischen den grauen Tegelschichten und den blau gefärbten findet sich eine 2.5^m mächtige Lage sandigen Tegels, auf welcher eine 0.24^m starke Steinschichte ruht.

Ein zweiter Brunnen beim Heizhause ist bis auf 25.3^m gegraben, dann 19.4^m gebohrt worden, so dass man eine Gesammttiefe von 44.7^m (Cote 12.4^m) erreicht hat. Leider liegt über die gegrabene Strecke, in welcher jedenfalls der Tegel u. zw. der Auskeilungslinie entsprechend seichter liegend, gefunden worden ist, keine Aufzeichnung vor. Bei der Bohrung traf man auf Sand, dann groben Schotter mit Sand und endlich Conglomerate, jedenfalls der brakischen Formation angehörend.

Ein dritter Brunnen daselbst, bei der Maschinenwerkstätte, wurde auf 29.4^m gegraben, dann weiter 11.2^m gebohrt, zusammen 40.6^m (Cote 16.5^m). Auch hier finden sich für die erste Strecke keine Aufzeichnungen. In der gebohrten Strecke fanden sich Sandlagen, abwechselnd mit schwachen Tegelschichten. Dazwischen fand man eine 10^{cm} dicke Braunkohlenlage. In der letzten Metertiefe traf man auf groben Schotter.

Für die Fundirung von Hochbauten trachtet man in der Regel die Schotterschichte der betreffenden Oertlichkeit zu erreichen und man fundirt sowohl auf Schotter tertiärer Formation, als wie auch auf Diluvial- und Alluvialschotter, nachdem man sich von der gehörigen Mächtigkeit der Schotterschichte überzeugt hat. Im gegentheiligen Falle und

wenn man aus localen Ursachen die tragfähige Schotter-schichte nicht erreichen kann, ist man gezwungen, durch künstliche Mittel (Verdichtungspiloten, Pfahlröste, Betonirung u. s. w.) die Tragfähigkeit des Bodens zu erhöhen.

Alle Schichten der tertiären Formation sowie der diluvialen Gruppe sind ohne weiteres zur Fundirung geeignet, ebenso der Schotter des Alluvialgebietes, sobald die gehörige Mächtigkeit constatirt ist. Absolut vermeiden soll man Alluvialschlamm (Silt) und die Schuttdecke.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen sollen nun eine Reihe geologischer Profile von Wien vorgeführt werden, aus welchen die Höhenlage und Mächtigkeit der einzelnen Schichten genau zu entnehmen ist.

Diese Profile folgen stets dem Laufe von Wiener Unrathscanälen, da sie eben, wie Anfangs bemerkt, bei diesen Bauten aufgezeichnet worden sind.

Favoriten-Sammelcanal (Blatt 26). Bei dem Bau desselben hat man den Boden in der beträchtlichen Länge von 4542·24^m und in Tiefen bis zu 12·5^m aufgeschlossen. Dieser Sammelcanal hat sein oberstes Ende in der Simmeringerstrasse im X. Bezirke in der Nähe des protestantischen Friedhofes. Er durchzieht in gerader Richtung die ganze Simmeringerstrasse bis in die Flucht der rückwärtigen Arsenalfront. An dieser Stelle wendet er sich nordöstlich gegen den St. Marxer Friedhof, durchfährt in dieser Strecke den Staatsbahnhof und die Strasse hinter dem Arsenele, kreuzt dann die Wien—Aspangbahn, den Wr.-Neustädter Canal, die Pressburger Reichsstrasse und den Bahnhof des Schlachtviehmarktes, durchzieht weiters das Terrain des neuen Viehmarktes und das Erdbergermais und mündet endlich ungefähr 460^m unterhalb der Kaiser-Josef-Brücke in den Donau-canal. An dieser Stelle liegt die Canalfundamentsohle — 2·20^m unter dem Ferdinands-Pegelnulppunkte, am höchsten Punkte beim protestantischen Friedhofe liegt die Sohle + 45·67^m.

Das durch diesen Bau aufgeschlossene geologische Profil ist hochinteressant, indem es sowohl das Alluvium der Donau, als wie die diluvialen Formationen am Steilrande und endlich die oberen Schichten der Tertiärzeit bis zu dem Congerientegel umfasst.

Vom Donaucanale bis zu dem 850^m entfernten Steilrande, an dessen Fusse der sogenannte Franzosengraben vorüberzog, fand die Aushebung in einer durchschnittlichen Tiefe von 2·60^m statt und findet man nach der Humusschichte Wellsand und Sand. Fester Schotter wurde in dieser Tiefe noch nicht blossgelegt.

Vom Steilrande bis über den Neustädter Canal hinauf findet man fast zu Tage liegend festen, diluvialen Löss, lichtgelb und braungelb gefärbt, in einer Mächtigkeit von 6—10^m. Darunter liegt diluvialer Sand.

In der weiteren Strecke bis zum Arsenele bietet die Bodenformation grosse Abwechslung. Der Localschotter steigt scharf an und tritt in den aufgelassenen Sandgruben beim St. Marxer Friedhofe zu Tage.

Weiters folgt lehmige Erde und Löss, durchzogen von Conglomeratschichten. Auch eine Muschelschichte findet sich im Löss eingebettet. Im oberen Theile dieser Partie stösst man bei einer Tiefe von 5·0^m zum ersten Male auf Congerientegel.

Längs der rückwärtigen Arsenalfront bis zur Einfriedung des Staatsbahnhofes finden sich in der aufgeschlossenen Tiefe von durchschnittlich 8·0^m Bildungen der Süsswassergruppe der Tertiärzeit u. zw. nach einer ganz schwachen Schuttschichte: Belvedere-Sand und Belvedere-Schotter. Der Tegel wird in dieser Tiefe nicht erreicht.

Unter dem Staatsbahnhofe liegt der Congerientegel, sanft ansteigend, 7·0—3·0^m tief. Darüber Belvedere-Schotter und Sand.

Beim Austritte der Canaltrace in die Simmeringerstrasse, welcher Strasse der Canal nun folgt, erreicht der Tegel seinen höchsten Punkt (42·0^m ober Null) und sinkt dann allmähig bis zur Gellertgasse (38·0^m), von wo an er in der Canalcunette nicht mehr auftritt. Der Tegelrücken hatte das Grundwasser, wie aus dem Profile zu entnehmen ist, stark gestaut. Ueber dem Congerientegel liegt 4·0—9·0^m mächtig Belvedere-Schotter und Sand.

In der nun folgenden 1400^m langen Strecke von der Gellertgasse bis zu dem protestantischen Friedhofe wird unter der 1—2^m mächtigen Schutt- und Humusschichte nur Belvedere-Sand und Schotter gefunden, obwohl Aushebungstiefen von 10·0^m vorkommen. — In der unteren Strecke traf man beim Baue Grundwasser, weshalb sich die Tegelschichte bald unter der Cunette vorfinden dürfte.

Panigl-gasse, zwischen Alleegasse und Karlsgasse, 86·0^m lang. Schon bei einer Tiefe von ungefähr 1·5^m zeigt sich gelber Löss, welchem Diluvialschotter mit reinen Sand-lassen folgt. In der aufgegrabenen Gesammttiefe von durchschnittlich 7·0^m (Sohlen-Cote 10·0^m ober Ferd. Null) fand man noch immer den Belvedere-Schotter, welcher in den untersten Schichten stark mit Lehm durchsetzt ist.

Hofgasse — Schlossgasse — Siebenbrunnengasse — Nikolsdorfergasse von der Griesgasse bis zur Matzleinsdorferstrasse (Blatt 27). Der Canalstrang ist 676·8^m lang. Der Aushub beträgt am unteren Ende 5·1^m (Cunettencote 16·7^m) am oberen Ende 7·3^m (Cote 23·3^m). Der Canal steigt an mit 60/100, dann 100/100 und im obersten Theile mit 200/100.

Zuerst findet sich eine durchschnittlich 1·0^m dicke Schuttschichte, dann folgt Löss im unteren Theile 2·0^m, nach aufwärts 3·0^m und gegen die Matzleinsdorferstrasse nur 0·3^m mächtig. In der Hof- und Schlossgasse folgen dann Lagen von gelbem und grauen Sand, welcher gegen die Nikolsdorfergasse die Belvedere-Formation deutlich erkennen lässt. In der Nikolsdorfergasse selbst erhebt sich rasch Congerientegel bis auf 1·0^m unter der Strassenoberfläche. In jener Strecke, wo der Canal die Siebenbrunnengasse durchzieht, liegt zwischen Schutt und Löss eine circa 1·0^m mächtige Humusschichte.

Gürtelstrasse und Steinbauergasse, nächst der Schönbrunnerlinie (Blatt 27). Die Trace beginnt bei der Lainzerstrasse, zieht durch die Gürtelstrasse bis zur Steinbauergasse und durch diese bis gegen die Schallergasse in einer Länge von 348·4^m. In dieser Strecke wurde der Boden in einer Tiefe von 3·5—5·0^m u. zw. von 24·2^m bis 19·8^m über Null aufgegraben. In der unteren Partie (Gürtelstrasse) findet man in der Tiefe von 3—4^m Wienflussschotter, über welchen eine 0·5—1·0^m hohe Schichte sandiger Letten (Alluvialschlamm oder Silt) gelagert ist; dann folgt

nach aufwärts Schutt und Ackererde. In der oberen Partie sind letztgenannte Materialien nur 2·0^m mächtig und folgt dann nach abwärts Schotter, stark mit Letten gemischt.

Marchettigasse, von der Mollardgasse gegen die Sandwirthgasse, 99·5^m lang. Der Aushub betrug an der unteren Stelle 4·7^m (Cunettencote 14·1^m) am oberen Ende 4·4^m (Cote 16·1). Das Gefälle der Canalsohle (10⁰/100) läuft fast parallel mit der Strassenoberfläche.

Man stösst nach der Schuttlage auf Schotter, ohne erkennbare Grenzen, welcher nach der Tiefe zunehmend mit Lössmengen gemischt ist; nur kleine Partien stellen sich als Alluvium des Wienflusses dar. Diese Massen lagern auf Tegel, welcher sich an zwei Stellen sehr bedeutend gegen die Oberfläche u. zw. bis auf 2·2^m und 2·7^m Tiefe erhebt. Die von diesen Erhöhungen gebildete Mulde enthielt bei der Durchstechung Grundwasser, weshalb Drainrohre verlegt worden sind.

Gumpendorferstrasse, von der Lastenstrasse bis zum Hause Or.-Nr. 17 oberhalb der Bettlerstiege. Lang 312·1^m. Der Aushub betrug an der seichtesten Stelle 5·50^m (Cote 14·6^m) an der tiefsten Stelle 9·2^m (Cote 11·9^m). In der letzten Metertiefe traf man auf tragfähigen Diluvialschotter, welcher fast parallel dem Canalgefälle (12⁰/100) folgt. Darüber liegt höchst uneben (2·0—8·0^m tief) zäher Lehm (Löss). Gegen die Dreihufeisengasse jedoch verschwindet diese Schichte fast ganz und findet sich an deren Stelle Lehm, welcher mehr oder weniger Stücke gebrannter Ziegelabfälle enthält. Man kann ganz deutlich erkennen, dass einst an dieser Stelle Ziegel erzeugt worden sind u. zw. aus dem diluvialen Lehm. Oberhalb der Dreihufeisengasse ist der Lehm im Urzustande.

Rahlgasse, 101·4^m lang und Bettlerstiege 85·8^m lang. Diese beiden Tracen schliessen sich senkrecht an die vorbeschriebenen an und vervollständigen das Bild als Querschnitte.

In der Rahlgasse findet man fast durchgehends im ganzen Aushube, welcher 6·8^m (Cote 12·9^m) bis 5·4^m (Cote 14·7^m) tief ist, Löss mit Ziegelabfällen, nur in der letzten Metertiefe findet sich darunter eine ganz dünne Schichte nicht umgeworfener Löss und dann Diluvialschotter.

In der Bettlerstiege kann man ganz deutlich die Form der ehemaligen Lehmgrube erkennen, welche grösstentheils mit unverbrauchten, mit Ziegelabfällen versehenen Lehm mit ausgefüllt ist. Darunter folgt, scharf ansteigend und sich bis 1·0^m unter dem Terrain erhebend, Löss, dann Diluvialschotter, weiters etwas Belvedere-Schotter und endlich bei der Cote von 19·0^m Inzersdorfer Tegel.

Kirchberggasse, von der Burggasse bis zur Siebensterngasse, 163·2^m lang. Der Aushub fand in einer Tiefe von 5·1—6·0^m statt und beträgt die Cote des Aushubes an der ersten Stelle 32·9^m, an der zweiten 26·4^m. Die Cunettensohle fällt somit circa 40⁰/100. Die erste Schichte — Anschüttung — läuft fast parallel mit dem Terrain und ist 1·5—2·0^m mächtig. Dann folgt stark verworfen 1·0—2·0^m rother Sand mit Schotter und darunter sehr tragfähiger Belvedere-Schotter mit Sand. An der Cunettensohle tritt derselbe mit sehr grossen Steinen auf. Im oberen Theile dieser Gasse ist in einer Tiefe von ungefähr 3·0^m eine kleine Partie Alluvialschotter eingebettet.

Kaiserstrasse, von der Mariahilferstrasse nach aufwärts, 119·4^m lang. Der Aushub betrug 4·8^m (Cote 37·2) bis 5·1^m (Cote 38·9^m). Die Schichtungen zeigen sich gegen die Mariahilferstrasse scharf abfallend und treten folgendermassen auf: Zuerst lehmige Erde, dann Löss mit kleinen Sandlassen, Sand mit wenig Schotter und schliesslich grober Schotter. Tegel wurde nicht erreicht, dürfte aber nicht tief liegen, da an der Cunettensohle das Grundwasser so mächtig auftrat, dass Drainröhren verlegt werden mussten.

Burggasse, von der Lastenstrasse bis Döblergasse (Blatt 27), 294·0^m lang. Der Aushub an der tiefsten Stelle der Cunette betrug 5·6^m (Cunetten-Cote 20·1^m über Null) an der höchsten Stelle 5·7^m (Cote 28·9^m) und die Cunette hat ungefähr dasselbe Gefälle als wie das Terrain, nämlich 30⁰/100.

Das angeschüttete Erdreich wechselt sehr stark in der Mächtigkeit, von 1·0—4·0^m. Dann folgt lehmige Erde in wenig reinem Zustande, welche sich im unteren Theile bis auf 5·6^m, im oberen Theile bis auf 3·0—4·0^m senkt. An der tiefsten Stelle der Cunette findet man Belvedere-Schotter, der sich ungefähr in der Höhe der Cunettensohle bis gegen den Beginn der Burggasse hinzieht, sich dann sehr stark, bis 2·5^m, unter der Oberfläche, erhebt, zwischen Kirchberggasse und Spittelberggasse wieder auf 5·5^m ein-senkt, um sich dann neuerlich, jedoch wellenförmig, um durchschnittlich 2·5^m zu erheben.

Dort, wo der Belvedere-Schotter das erstmalig ansteigt, liegt in der Canalcunette ein 1·6^m hoher Tegelrücken (Congerien-Formation), welcher das Grundwasser bedeutend staute. Derselbe ist nun durchbrochen und sind Drainröhren versetzt worden.

Albertgasse, von der Florianigasse und Josefstädterstrasse bis zur Blindengasse, 391·6^m lang. (Blatt 27.) Tiefe der Cunette unten 8·0^m (Cote derselben 34·5^m), oben 5·5^m (Cote 40·0^m). Gefälle 14⁰/100, etwas stärker als die Oberfläche.

In der Albertgasse wechseln die Schichten sehr rasch. Zuerst 1·0—2·0^m Anschüttung, dann leicht verworfene Lössschichten gelber, grünlicher und röthlicher Färbung bis auf die Gesamttiefe von 4·0^m. Zuletzt Localschotter mit feinen Sandlassen durchzogen. Zwischen Schotter und Löss ist eine 0·2—0·3^m mächtige Conglomeratschichte, welche sehr interessante Versteinerungen (sog. Lösskindel) aufweist.

In der Josefstädterstrasse ist die Lössschichte, welche hier mit feinem Sand durchsetzt ist, mächtiger und senkt sich bis auf 5·0—6·0^m herab, so dass der Schotter nicht immer die Canalcunette übersteigt.

Trautsongasse, lang 177·7^m, Aushub durchschnittlich 5·5^m (Cunettencote 23·7 und 29·0^m). Der Schutt ist durchschnittlich 2·5^m mächtig. Dann folgt fester gelber Löss, welcher mit fast horizontalem Schotter und Sandlassen von sehr geringer Mächtigkeit durchzogen ist. Bei der Aufgrabung von 5·5^m wurde die Schotterformation nicht erreicht.

Pelikangasse und Alserstrasse von der Mariannengasse bis zur Hernalser Linie 467·3^m lang. (Blatt 27). Der Aushub beträgt an der tiefsten Stelle 7·1^m (Cote des Aushubes 21·3^m), an der höchsten Stelle 5·9^m (Cote 29·3^m). Das Gefälle der Cunette 17⁰/100, das der Strasse rund 14⁰/100.

In der Pelikangasse ist die Schuttschichte ungefähr 1.2^m mächtig. Dieselbe liegt zum Theile unmittelbar auf der bis auf die durchschnittlich 6.5^m tiefe Cunettensohle reichenden Localschotterschichte, zum Theile auf einer schwachen (im Maximum 1.1^m dicken) Lössschichte auf, welche letztere ebenfalls auf dem Localschotter gelagert ist.

In der Alserstrasse sind die Schichtungen nicht verworfen. Die Schuttschichte ist nur 0.6—1.60^m mächtig, dann 0.7—1.7^m Löss und dann folgt Localschotter. Gegen die Albertgasse erhebt sich stark undulirend Congerientegel, welcher bis auf 1.5^m aufsteigt und starke Grundwasser-Anschwellungen zur Folge hatte.

Schwarzspaniergasse, nächst der Universitätsstrasse, Länge 26.2^m. Die Cunette ist einerseits 5.8^m (Cote 17.2^m), andererseits 7.0^m (Cote 16.3^m) tief. Der Schutt ist 1.0—2.0^m mächtig, dann folgt 1.5^m Dammerde und

dann tragfähiger Diluvialschotter bis auf die Sohle der Cunette.

Grünethorgasse, von Nr. 3 bis in die Porzellangasse Nr. 26, lang 60.0^m. Die Cunette ist nur 2.3^m tief (Cote 3.7^m und 4.0^m), der Boden besteht fast durchaus aus Anschüttung und alten Strassenkrusten. In der Tiefe von 2.0^m findet sich etwas gelber Letten.

Diese 15 Profile über die geologische Formation des Bodens in Wien geben gewiss interessante Aufschlüsse. Allerdings haben dieselben noch nicht jene Ausdehnung, welche zur genauen Beurtheilung der Bodengestaltung und der Fundirungsverhältnisse von ganz Wien erforderlich erscheinen.

Aber, indem wir fortfahren solche Profile zu sammeln und indem wir dieselben durch directe Erhebungen bei Fundirungen selbst ergänzen, wird es in nicht zu ferner Zeit möglich werden, ein klares und umfassendes Bild des Untergrundes zu erlangen.

Eiserner Eisenbahnwechsel mit verbesserter Sicherheits-Vorrichtung.

(Patent Clement.)

Mitgetheilt von A. Wagner, Ober-Ingenieur der Vorarlberger Bahn.

(Mit Zeichnungen auf Blatt Nr. 28.)

Bei diesem vom Betriebs-Director der Vorarlberger Bahn R. Clement construirten Wechsel waren folgende Bedingungen zu erfüllen:

1. Ersatz des hölzernen Wechselstockes durch ein Gerippe aus Altschienen.

Die immer zunehmenden Preise für Weichenschwellen, die geringe Dauer des Holzes gegenüber dem Eisen und die Entwerthung der Altschienen seit der allgemeinen Einführung von Stahlschienen lassen einen solchen Ersatz höchst wünschenswerth erscheinen, besonders für solche Bahnen, bei welchen die Altschienen in Folge grosser Entfernung von inländischen Walzwerken einen sehr geringen Werth besitzen.

2. Passende Construction des Wechselgerippes, damit bei dem Uebergange von Eisen- auf Stahlschienen die nothwendige Abänderung der Chairs entbehrlich wird.

3. Passende Construction des Wechsels selbst, damit allen Anforderungen für die Sicherheit des Betriebes entsprochen wird.

4. Anbringung der bestbewährten, jedoch für den vorliegenden Zweck wesentlich verbesserten Sicherheits-Vorrichtung nach dem Patente Clement & Paravicini, unter Berücksichtigung allfälliger Anwendung des Wechsel-systems Saxby & Farmer.

Diesen Bedingungen ist, wie aus nachfolgender Beschreibung des Wechsels hervorgeht, vollkommen entsprochen.

Der Stock oder das Gerippe des Wechsels (Blatt 28, Fig. 1—4) besteht aus zwei eisernen Rahmenstücken oder Langschwellen *a*, welche durch zehn eiserne Querschwellen *b*, *c*, *d* und *e* verbunden sind, auf welchen die Stockschienen und die beweglichen Spitzschienen aufruhend.

Die Langschwellen *a*, Fig. 2, bestehen aus je drei gekuppelten Stücken, wovon die seitlichen Stücke durch

Zerschneiden von Altschienen oberhalb des Schienenfusses hergestellt sind, das mittlere Stück jedoch behufs wirksamen Widerstandes gegen Seitenschub im vollen Schienenprofil belassen wurde. (Fig. 5—7.)

Die Querschwellen *b* und *c*, Fig. 2, zugleich als Chairs dienlich, sind ebenfalls aus Altschienen durch Abtrennen des Schienenkopfes hergestellt und bestehen aus je zwei Stücken, welche unter einander gekuppelt sind (Fig. 5—7); die Querschwellen *b* haben wegen Aufnahme des Wechselständers eine grössere Länge. Jede solche Querschwelle ist beiderseits dem Schienenfuss entsprechend ausgearbeitet, damit die Stockschiene hier eingeschoben und auf der inneren Seite durch den Steg der Querschwelle selbst festgehalten werden kann. Auf der äusseren Seite wird die Stockschiene durch Schrauben und Klemmplatten festgehalten. Diese Befestigung ist eine sehr kräftige, auch ist ein rasches Auswechseln der Stockschiene durch blosses Lüften der Muttern ermöglicht. Eine Bearbeitung der Stockschienen, Lochen, Einklinken etc. entfällt gänzlich. Die Querschwelle *e*, Fig. 2, welche die Verwurzelungen der Spitzschiene trägt, ist stärker als die anderen und besteht aus zwei vernieteten Altschienenstücken von vollem Querschnitt (Fig. 8—10).

Die Verwurzelung der Spitzschienen *f*, Fig. 2, erfolgt auf eine von den bisher gebräuchlichen Constructionen abweichende Art und zwar mittelst eines kräftigen Zapfens, der in seinem Diameter die Breite der Spitzschiene übersteigt, einen conischen Rand hat und dort an seinem grössten Umfange durch entsprechend ausgedrehte Platten und Schrauben festgehalten ist (Fig. 8—9). Die beiden Endquerschwellen *d*, Fig. 2, bestehen aus je zwei Stück unter einander gekuppelten Altschienen, von welchen die Schienenfüsse abgetrennt sind.

Die Stock- und Spitzschienenlänge schliesst sich dem Normale der k. k. General-Inspection an. Die Sicherheits-

Vorrichtung, Fig. 11—13, besteht aus dem um einen Zapfen *g* drehbaren Pedal *h*, welches ebenfalls aus Altschienen hergestellt ist. Der an das Pedal angenietete Oberkeil *i* wirkt auf den Unterkeil *k*, welcher direct auf der Zugstange der Spitzschiene angebracht ist. Es ist somit der bisher angewandte Winkelhebel weggelassen.

Der Wechselständer ist derselbe, wie bei der ursprünglichen patentirten Sicherheits-Vorrichtung.

Durch die eben beschriebene Wechsel-Construction werden die oben aufgestellten Bedingungen wirklich erfüllt und zwar:

ad 1. Das theuere und relativ rasch zu Grunde gehende Holzgerippe ist durch ein weit dauerhafteres eisernes Gerippe ersetzt, welches auf billige und bequeme Art aus Altschienen hergestellt wird.

ad 2. Der Uebergang von Eisen- auf Stahlschienen ist ohne Weiters möglich, da die Chairs gänzlich weggelassen und die Anordnung der Querschwellen eine derartige ist, dass die gehobelten Schnittflächen der Schienenstege einerseits die Gleitflächen für die Spitzschienen bilden, andererseits aber auch durch die dem Schienenfusse nachgeformte Ausarbeitung im Schienenstege eine kräftige Befestigung der Stockschienen ermöglicht wird. Letztere bedürfen keinerlei Bearbeitung.

ad 3. Der Wechsel entspricht allen Anforderungen der Betriebs-Sicherheit, indem seine Stabilitäts-Verhältnisse sehr günstig sind. Derselbe besitzt nicht nur ein vollkommen sehr günstiges Tragvermögen, sondern ist auch sehr widerstandsfähig gegen seitliche Verschiebungen, was durch die leicht ermöglichte feste Unterkrampfung der Langschwellen begünstigt wird.

Die Stockschienen sind, wie schon erwähnt, kräftig befestigt und können rasch ausgewechselt werden. Die Verwurzelung der Spitzschienen ist eine äusserst solide, indem bei dieser Anlage der Wurzel das sogenannte Schlagen des Wechsels beim Befahren von der Ausweiche in die Gerade gänzlich behoben wird. Es wird hiedurch die Gefahr einer Entgleisung, sowie die Abnutzung der Spitzschienen und der Fahrzeuge wesentlich herabgemindert. Die Legung des Wechsels geschieht leichter und billiger, als jene von hölzernen Wechsels.

ad 4. Die Sicherheits-Vorrichtung nach dem Patente Clement & Paravicini, schon im Jahre 1869 von der k. k. General-Inspection als zweckmässig anerkannt, auf der Weltausstellung im Jahre 1873 prämiirt, verbreitet sich gegenwärtig auf vielen Bahnen Oesterreich-Ungarns und Deutschlands. Eine wichtige Anerkennung ist dieser Vorrichtung nach den Ergebnissen der im Juni 1878 zu Stuttgart abgehaltenen Techniker-Versammlung zu Theil geworden, wie dies aus dem bezüglichen Referate, Seite 129, 130 und 387 hervorgeht. (Siehe auch „Wochenschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines“ vom 19. April 1879, Nr. 16, Seite 71.)

Bei Anwendung des eisernen Wechsels jedoch, gestattet die Befestigungsweise der Schienen eine vereinfachte Sicherheits-Vorrichtung, denn weil das Pedal bis über die Zungenspitze reichen kann, ist es möglich,

den Unterkeil direct auf die Zugstange der Spitzschienen aufzusetzen, wodurch der bisher gebräuchliche Winkelhebel ganz entfällt.

Dieser Wechsel erzielt daher auf wesentlich vereinfachte Weise alle bereits anerkannten und nachgewiesenen Vortheile der Clement & Paravicini'schen Sicherheits-Vorrichtung, bei welcher durch den Druck der passirenden Fahrzeuge das Pedal niedergehalten und ein fester Anschluss der Spitzschiene an die Stockschiene bewirkt wird. Diese immer sichere und zuverlässige Wirkung des Pedals verhindert das gefährliche Spiessen oder die Entgleisung der Fahrzeuge in Folge Verlegung des Spitzenschlusses durch Steine oder Schnee, auch in Folge zufälliger Umwechslung knapp vor dem Einfahren; ferner ist das Aufschneiden und Zurückfahren eines nicht ganz aus dem Wechsel ausgefahrenen Fahrbetriebsmittels, wegen Mangel des entgegenwirkenden Umleggewichtes ganz ungefährlich.

Dieses Umleggewicht ist aber nur zu Folge der automatischen Wirkung des Pedales entbehrlich, was noch weitere Vortheile mit sich bringt. In erster Reihe werden alle beim raschen Umwechseln entstehenden Stösse aufgehoben, wodurch die betreffenden Wechsel-Bestandtheile sehr geschont werden; der einfache Ständer erleichtert ferner dem manipulirenden Personale bei andauernden Verschiebungen den Dienst, indem zur Umstellung des Wechsels am Hebel nur eine Kraft von 15^{kg} nöthig ist; endlich wird das Gewicht des gebräuchlichen Wechselständers auf die Hälfte, das ist von 130^{kg} auf 65^{kg} reducirt. Bei der vorbeschriebenen Wechsel-Construction wird noch überdies das Gewicht der Sicherheits-Vorrichtung von 74^{kg} auf 46^{kg} herabgemindert. Die Sicherheits-Vorrichtung gestattet auch die Anwendung des Saxby & Farmer'schen Weichenstell-Systemes und ist überhaupt ein unentbehrliches Mittel für die sichere Function aller Distanzwechsel-Systeme.

Was nun die Herstellungskosten eines solchen eisernen Wechselgerippes mit verbesserter Sicherheits-Vorrichtung anbelangt, so belaufen sich dieselben inclusive Kleiseisenzeug, Anfertigung der Zungenwurzeln und Umgestaltung des Wechselständers, laut Nachweisung der Werkstätte auf 240 fl., wobei die Altschienen mit 3 kr. per Kilogramm in Rechnung gestellt erscheinen und das Zuschneiden der Schienen auf einer Stoss-, das Abtrennen derselben ihrer Länge nach im Stege, auf einer Hobelmaschine bewirkt wurde. Die Herstellungskosten eines gewöhnlichen Wechsels mit hölzernem Unterbau ohne Sicherheits-Vorrichtung, inclusive Chairs, Wechselplatten, Kleiseisenzeuges, belaufen sich bei den hierortigen Holzpreisen auf 250 fl. Bei der Erzeugung eiserner Wechsel in grösserem Umfange dürften die Gesteungskosten sich noch wesentlich reduciren, wenn zum Abschneiden der Schienen und zum Abtrennen derselben im Stege die für solchen Zweck passende Circularsäge von Ehrhardt in Düsseldorf verwendet wird.

Nach dieser Construction sind bei der Vorarlberger Bahn zwei Wechsel ausgeführt und in der Station Feldkirch seit circa zwei Jahren in Verwendung; die Lage derselben ist eine vollkommen feste, sichere und exacte sowohl in Beziehung auf Richtung, als auf Niveau und war eine Nachbesserung bis jetzt nicht erforderlich.

In Verbindung mit einem dieser Wechsel wurden auch beim Kreuzungsgeleise eiserne Weichenschwellen aus Altschienen an Stelle der sogenannten Extrahölzer hergestellt und eingelegt. Diese Weichenschwellen, Fig. 14—16, aus je zwei Stück Schienenfuss- und Stegtheilen gebildet, haben eine Auflagefläche von 210^{mm}; die Verbindung der Schienen geschieht mit angenieteten Stücken der beim Uebergange von Eisen- auf Stahlschienen zurückgewonnenen alten Eisenlaschen; desgleichen werden zur Festhaltung der Fahr- schienen auf den Querschwellen Stücke der alten Laschen, sowie die alten Laschenschrauben mit Klemmplatten benützt.

Die Kreuzung, bestehend aus einer Gussstahlspitze mit angeschraubten Knieschienen, liegt auf Querschwellen gleicher Construction auf.

Ein completer Satz solcher eisernen Weichenschwellen sammt Kleinmaterialie kostet 264 fl., während die für denselben Wechsel nöthigen Extrahölzer sammt Kleinmaterialie bei den hiesigen Holzpreisen auf 261 fl. zu stehen kommen. Die Montirung und Lagerung der Eisenschwellen ist gleichfalls vollkommen genau, und war seit Einlegung derselben, d. i. seit Juli 1880 noch keine Nachbesserung nöthig.

Vollständige Lösung des „de Saint-Venant“-schen Problemes.

Von Emil Herrmann, Professor in Schemnitz.

I. Einleitung.

Bei der Fassung der de Saint-Venant'schen Aufgabe wollen wir von der üblichen nur insofern abweichen, als wir uns nicht nur auf gerade stabförmige Körper beschränken, sondern sie auch auf krumme Stäbe mit unveränderlichem Querschnitte ausdehnen wollen. Die sonstigen Beschränkungen behalten wir aber bei; die Aufgabe lautet dann folgender Weise:

1. Welche Spannungen treten in einem beliebigen Punkte irgend eines Querschnittes eines geraden oder krummen stabförmigen Körpers auf, wenn weder auf die Masse noch auf die Mantelfläche, sondern lediglich auf die beiden Endquerschnitte desselben fördernde und drehende Kräfte wirken?

2. Welche Gestalt nimmt die gerade oder krumme Stabachse unter der Belastung an?

Die beschränkenden Voraussetzungen aber sind folgende:

1. Der Stab bestehe aus einem isotropen Material.

2. In Ebenen oder Flächen, welche zur Achse des Stabes parallel sind, treten nur der Achse parallele Schubspannungen auf.

Es sei (Fig. 1) AB die Achse eines krummen Stabes, $CDEF$ ein Querschnitt desselben, A der Schwerpunkt des Querschnittes.

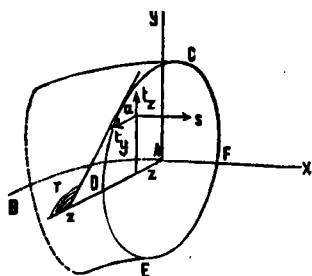
Wir legen nun das Achsensystem Ax , Ay und Az so, dass die zy Ebene mit der Ebene des Querschnittes zusammenfällt, dann ist Ax die Tangente der Stabachse im Punkte A . In Folge der Belastung treten im Punkte a des Querschnittes folgende Spannungen auf: 1. die Normalspannung s , parallel zur Achse der x ; 2. die Schubspannung t_x , welche gegen die z Achse senkrecht gerichtet ist und 3. die Schubspannung t_y , welche zur y Achse senkrecht gerichtet ist.

Diese Spannungen müssen bekanntlich den folgenden Bedingungen entsprechen; es muss für jeden Punkt des Querschnittes

$$\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial t_x}{\partial y} + \frac{\partial t_y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial t_x}{\partial x} = \frac{\partial t_y}{\partial x} = 0$$

Fig. 1.



sein. Für die Umfangspunkte des Querschnittes aber muss die resultirende Schubspannung in die Tangente fallen, also

$$\frac{t_x}{t_y} = \tan \tau$$

oder

$$t_x \cos \tau - t_y \sin \tau = 0$$

Bezeichnet man mit ξ , η und ζ die Verschiebungen, welche jener Punkt des Trägers, dessen Coordinaten x , y und z sind, in Folge der Belastung erfährt; dessen Coordinaten nach der Belastung also $x + \xi$, $y + \eta$ und $z + \zeta$ sind, so ist, wenn E den Modulus der Normal-Elasticität und E' den Modulus der Schub-Elasticität bezeichnet:

$$s = E \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot t_y = E' \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right), t_x = E' \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

Ferner ist

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{\nu s}{E} \text{ und}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0.$$

Der Coefficient der Quercontraction ν ergibt sich aus dem Verhältnisse

$$\frac{E}{E'} = 2(1 + \nu) \text{ also } \nu = \frac{E - 2E'}{2E'}.$$

Auch werden wir für $1 + \nu = \epsilon$ schreiben.

Gewöhnlich pflegt man die Biegungs-, Schub- und Drehungs-Elasticität gleichzeitig zu behandeln; mir scheint ein mehr synthetisches Vorgehen passender, weil klarer, zu sein.

II. Drehungs-Elasticität gerader prismatischer Körper.

Ein prismatischer Körper, dessen einer Endquerschnitt festgehalten ist, während an seinem anderen Querschnitte ein um die Achse des Körpers drehendes Kräftepaar wirkt, ist auf Drehungsfestigkeit beansprucht.

Das drehende Moment erzeugt keine Normalspannung, sondern nur die Schubspannungen t_y und t_x .

Da diese Spannungen nur einem Kräftepaare das Gleichgewicht halten, muss ihre fördernde Wirkung gleich Null sein; wir erhalten demnach

$$\iint t_y \, dy \, dz = 0$$

$$\iint t_x \, dy \, dz = 0.$$

Betrachten wir das um die x Achse drehende Moment M_x als positiv, wenn es von der $+z$ Achse zur $+y$ Achse dreht, so ist

$$\iint (t_z \cdot z - t_y \cdot y) dy \cdot dz = M_x.$$

Weil die Normalspannung $s = 0$ ist folgt

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

d. h. jede Verschiebung ist von jener Coordinate des Punktes unabhängig, zu welcher sie parallel ist. Dem entsprechend setzen wir

$$\begin{aligned} E'\xi &= F_1(y, z) \\ E'\eta &= F_2(x, z) \\ E'\zeta &= F_3(x, y) \end{aligned}$$

Mit diesen Werthen wird

$$\begin{aligned} t_y &= \frac{\partial F_1(y, z)}{\partial z} + \frac{\partial F_3(x, y)}{\partial x} \\ t_z &= \frac{\partial F_1(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial F_2(x, z)}{\partial x} \end{aligned}$$

während

$$\frac{\partial F_2(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial F_3(x, y)}{\partial y} = 0 \text{ ist.}$$

Differenziren wir den letzten Ausdruck nach z , so kommt

$$\frac{\partial^2 F_2(x, z)}{\partial z^2} = 0,$$

woraus ersichtlich ist, dass $F_2(x, z)$ die Grösse z nur in der ersten Potenz enthalten kann. Sind a_2 und b_2 Functionen von x , so kann man

$$F_2(x, z) = a_2 + b_2 z$$

setzen.

Wenn wir denselben Ausdruck nach y differenziren, kommt

$$\frac{\partial^2 F_3(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Sind demnach a_3 und b_3 Functionen von x , so kann man

$$F_3(x, y) = a_3 + b_3 y$$

setzen. Substituiren wir die gewonnenen Werthe in die wiederholt benutzte Gleichung und wir erhalten

$$\frac{\partial F_2(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial F_3(x, y)}{\partial y} = b_2 + b_3 = 0,$$

somit

$$b_3 = -b_2.$$

Weil die x Achse die Trägerachse im Schwerpunkte des Querschnittes berührt, muss

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{y=z=0} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_{y=z=0} = 0$$

sein. Hiernach ist

$$\frac{\partial a_2}{\partial x} = \frac{\partial a_3}{\partial x} = 0.$$

Schreiben wir für $\frac{\partial b_2}{\partial x} = -\frac{\partial b_3}{\partial x} = E'\delta$ und für $F_1(y, z)$

einfach F_1 so ist

$$\begin{aligned} t_z &= E'\delta + \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ t_y &= -E'\delta + \frac{\partial F_1}{\partial z} \end{aligned}$$

Nachdem

$$\frac{\partial t_z}{\partial x} = \frac{\partial t_y}{\partial x} = 0$$

muss auch

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = 0$$

sein, d. h. δ ist unabhängig von x , weshalb

$$b_2 = -b_3 = E'\delta \cdot x$$

und

$$\eta = \frac{a_2}{E'} + \delta x z$$

$$\zeta = \frac{a_3}{E'} - \delta x y \text{ ist.}$$

Nachdem der Anfangspunkt der Coordinaten der Achse des Stabes angehört, muss $\eta = \zeta = 0$ sein, wenn $x = y = z = 0$ ist, woraus denn $a_2 = a_3 = 0$ folgt. Damit wird dann

$$\eta = \delta x z$$

$$\zeta = -\delta x y.$$

Betrachten wir die Lage zweier ursprünglich homologer Punkte zweier Querschnitte, deren Distanz x ist.

Wenn der eine Querschnitt jener der yz Ebene ist, sind die Coordinaten des betreffenden Punktes sowohl vor als auch nach der Belastung y und z , während die Coordinaten des homologen Punktes des zweiten Querschnittes nach der Belastung

$$y + \eta \text{ und } z + \zeta \text{ sind.}$$

Der Winkel, um welchen der letztere Punkt gegen seine ursprüngliche Lage verdreht ist, wird also, da $ty\omega$ näherungsweise $= \omega$ ist

$$\omega = \sqrt{\frac{\eta^2 + \zeta^2}{y^2 + z^2}} = \delta x$$

d. h. unabhängig von der ursprünglichen Lage im Querschnitte sein. Der spezifische Verdrehungswinkel wird demnach für alle Punkte und Querschnitte ein und derselbe, nämlich

$$\frac{\omega}{x} = \delta \text{ sein.}$$

Schreiben wir jetzt noch statt

$$F_1 = E'\delta \cdot F,$$

was man thun kann, nachdem ja δ constant ist, so wird

$$t_z = E'\delta \left[\frac{\partial F}{\partial y} + z \right]$$

$$t_y = E'\delta \left[\frac{\partial F}{\partial z} - y \right].$$

Es bleibt noch die Function F zu bestimmen übrig. Hiezu dienen die Bedingungen

$$\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial t_z}{\partial y} + \frac{\partial t_y}{\partial z} = 0$$

und

$$t_z \cos \tau - t_y \sin \tau = 0.$$

Da $s = 0$ ist, liefert die erstere Bedingung

$$(1) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0;$$

die zweite aber

$$(2) \dots \dots \left(\frac{\partial F}{\partial y} + z \right) \cos \tau - \left(\frac{\partial F}{\partial z} - y \right) \sin \tau = 0.$$

Bisher war man immer bemüht, die F Function vollkommen genau und dem Querschnitte entsprechend zu bestimmen, was mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden ist. Wir wollen ein anderes Verfahren befolgen, welches die Spannungen t_y und t_z zwar nicht vollkommen genau, aber mit jedem beliebigen Grad von Annäherung zu bestimmen gestattet und keine wesentliche Schwierigkeit bereitet.

Die unter (1) ausgesprochene Eigenschaft kommt jeder Function

$$F = \sum f(y \pm z \sqrt{-1}) = \sum f(y \pm zi)$$

zu. Unserem Zwecke entsprechen nur reelle Werthe, weshalb

$$F = \sum \frac{f(y + iz) + f(y - iz)}{2} + \sum \frac{f(y + iz) - f(y - iz)}{2i}$$

sein muss.

Denkt man sich jede der f Functionen nach dem Maclaurin'schen Satze in eine Reihe verwandelt, so kommt für F der Ausdruck

$$F = \sum \alpha_n \frac{(y + zi)^n + (y - zi)^n}{2n} + \sum \beta_n \frac{(y + zi)^n - (y - zi)^n}{2ni}$$

worin $\frac{\alpha_n}{n}$ und $\frac{\beta_n}{n}$ constante Grössen bezeichnen, welche vom Querschnitte abhängen. Zur Bestimmung der Constanten dient die Bedingung Gleichung (2), welche auch Umfangsbedingung genannt wird.

Zwei Bestimmungs-Gleichungen liefern die Bedingungen, dass die Schubspannungen keine fördernde Resultirende haben, nämlich

$$\iint t_y dy dz = 0$$

$$\iint t_z dy dz = 0;$$

die übrigen Bestimmungs-Gleichungen erhält man dadurch, dass man im Umfange des Querschnittes eben so viele Punkte wählt, in welchen die Umfangsbedingung erfüllt wird, als unbekannte Constante zu bestimmen übrig sind. Je mehr Glieder der für F aufgestellten Reihe wir beibehalten, in umso mehr Punkten kann die Umfangsbedingung erfüllt werden und umso genauer können die Schubspannungen berechnet werden.

Ist F bekannt, dann ergibt sich der spezifische Verdrehungswinkel

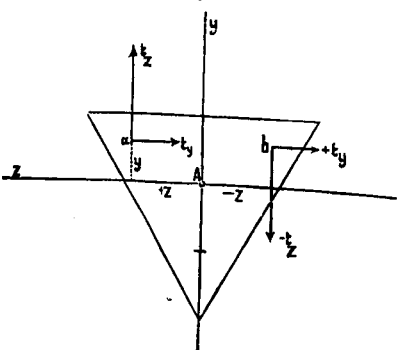
$$(3) \quad \delta = \frac{M_x}{E' \iint \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y} + z \right) z - \left(\frac{\partial F}{\partial z} - y \right) y \right] dy dz}$$

Die Bestimmung der Constanten wird wesentlich erleichtert, wenn man jene Glieder der Reihe, welche Null sind und jene Gleichungen, welche identisch erfüllt sind, von vornherein weglässt.

Als Achsen der y und z wählt man am besten die Trägheits-Hauptachsen des Querschnittes.

In der Regel ist der Querschnitt wenigstens in Bezug auf eine der Trägheits-Hauptachsen symmetrisch, diese

Fig. 2.



wählen wir als Achse der y . (Fig. 2.) Es wird dann t_z in $-t_z$ übergehen, wenn man $-z$ statt $+z$ in dem Ausdrucke substituirt. Es ist aber

$$t_z = E' \delta \left[\sum \alpha_n \frac{(y + zi)^{n-1} + (y - zi)^{n-1}}{2} + \sum \beta_n \frac{(y + zi)^{n-1} - (y - zi)^{n-1}}{2i} + z \right]$$

und dieser Ausdruck wird mit z das Zeichen ändern, wenn alle Glieder desselben ungerade Potenzen von z enthalten; es müssen daher alle α gleich Null sein.

Ist demnach der Querschnitt in Bezug auf die Achse der y symmetrisch, so hat man

$$(4) \quad \begin{cases} t_z = E' \delta \left[\sum \left(\beta_n \frac{(y + zi)^{n-1} - (y - zi)^{n-1}}{2i} \right) + z \right] \\ t_y = E' \delta \left[\sum \left(\beta_n \frac{(y + zi)^{n-1} + (y - zi)^{n-1}}{2} \right) - y \right] \end{cases}$$

Die Bedingung

$$\iint t_z dy dz = 0$$

ist dann eine identische Gleichung, weil jedem t_z ein ebenso grosses $-t_z$ entspricht, weshalb das Integral auch

$$\iint (t_z - t_z) dy dz$$

geschrieben werden kann und Null ist.

Wenn der Querschnitt auch in Bezug auf die z Achse symmetrisch ist, können nur jene Glieder beibehalten werden, für welche n eine gerade Zahl ist; denn in diesem Falle muss t_y sein Zeichen ändern, wenn y dasselbe ändert, was nur dann möglich ist, wenn t_y y nur in ungeraden Potenzen enthält.

Für sogenannte doppelt symmetrische Querschnitte hat man demnach

$$(5) \quad \begin{cases} t_z = E' \delta \left[\sum \left(\beta_n \frac{(y + zi)^{2n-1} - (y - zi)^{2n-1}}{2i} \right) + z \right] \\ t_y = E' \delta \left[\sum \left(\beta_n \frac{(y + zi)^{2n-1} + (y - zi)^{2n-1}}{2} \right) - y \right] \end{cases}$$

Wenn endlich der Querschnitt auch noch in Bezug auf eine solche Achse symmetrisch ist, welche mit der Hauptachse 45° einschliesst, so fallen auch jene β weg, deren Zeiger nicht durch 2 theilbar, weshalb dann

$$(6) \quad \begin{cases} t_z = E' \delta \left[\sum \left(\beta_n \frac{(y + zi)^{4n-1} - (y - zi)^{4n-1}}{2i} \right) + z \right] \\ t_y = E' \delta \left[\sum \left(\beta_n \frac{(y + zi)^{4n-1} + (y - zi)^{4n-1}}{2} \right) - y \right] \end{cases} \text{ ist.}$$

In den letzteren zwei Fällen ist nicht nur

$$\iint t_z dy dz = 0$$

sondern auch

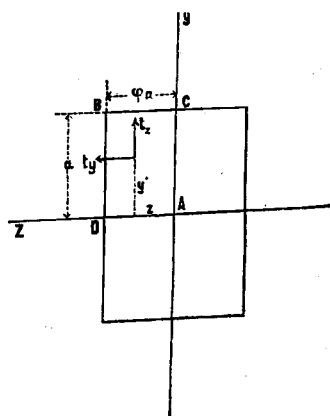
$$\iint t_y dy dz = 0$$

eine identische Gleichung, weshalb die Constanten nur mit Hilfe der Umfangsbedingung zu bestimmen sind.

In jeder Ecke des Umfanges ist sowohl t_z als auch $t_y = 0$, weil die resultierende Schubspannung die Richtung beider sich schneidenden Linien nicht gleichzeitig besitzen kann.

Jeder Eckpunkt gibt demnach zwei Bestimmungsgleichungen, jeder andere Punkt aber nur eine. Zur Erläuterung des Verfahrens diene folgendes Beispiel:

Fig. 3.



Es sind die Schubspannungen eines auf Torsion beanspruchten rechteckigen Querschnittes zu bestimmen. Da das Rechteck in Bezug auf beide Hauptachsen symmetrisch ist, können wir sogleich die Gleichungen (5) anwenden. Behalten wir 4 Constante bei, so ist

$$t_x = E' \delta [(\beta_1 + 1)z + \beta_2(3zy^2 - z^3) + \beta_3(5y^4z - 10y^2z^3 + z^5) + \beta_4(7y^6z - 35y^4z^3 + 21y^2z^5 - z^7)],$$

$$t_y = E' \delta [(\beta_1 - 1)y + \beta_2(y^3 - 3yz^2) + \beta_3(y^5 - 10y^3z^2 + 5yz^4) + \beta_4(y^7 - 21y^5z^2 + 35y^3z^4 - 7yz^6)].$$

Die Coordinaten des Eckpunktes B sind $y = a$, $z = \varphi a$

und $t_x = t_y = 0$ somit

$$(\beta_1 + 1)\varphi a + \beta_2(3\varphi a^3 - \varphi^3 a^3) + \beta_3(5\varphi a^5 - 10\varphi^3 a^5 + \varphi^5 a^5) + \beta_4(7\varphi a^7 - 35\varphi^3 a^7 + 21\varphi^5 a^7 - \varphi^7 a^7) = 0 \text{ und}$$

$$(\beta_1 - 1)a + \beta_2(a^3 - 3\varphi^2 a^3) + \beta_3(a^5 - 10\varphi^2 a^5 + 5\varphi^4 a^5) + \beta_4(a^7 - 21\varphi^2 a^7 + 35\varphi^4 a^7 - 7\varphi^6 a^7) = 0$$

oder entsprechend abgekürzt

$$(\alpha) \dots \beta_1 + \beta_2 a^2 (3 - \varphi^2) + \beta_3 a^4 (5 - 10\varphi^2 + \varphi^4) + \beta_4 a^6 (7 - 35\varphi^2 + 21\varphi^4 - \varphi^6) = -1$$

$$(\beta) \dots \beta_1 + \beta_2 a^2 (1 - 3\varphi^2) + \beta_3 a^4 (1 - 10\varphi^2 + 5\varphi^4) + \beta_4 a^6 (1 - 21\varphi^2 + 35\varphi^4 - 7\varphi^6) = 1.$$

Wir brauchen nun noch zwei Bestimmungsgleichungen, können daher noch in zwei Punkten der Umfangsbedingung entsprechen. Wir wählen einen Punkt in BC, den zweiten in BD. Ersteren wählen wir so, dass das resultierende Moment aller t_x Spannungen in der BC Seite gleich Null ist, d. h. dass

$$\int_0^{\varphi a} t_x \cdot z \, dz = 0.$$

Hiemit erreichen wir, dass das resultierende Moment der nicht vollkommen genauen t_x Spannungen jenem der richtigen Spannungen gleich ist.

Für die Seite BC ist $\tau = 0$, weshalb die Umfangsbedingung

$$t_x \cos 0 - t_y \sin 0 = 0$$

oder

$$t_x = 0 \text{ liefert.}$$

Nachdem t_x in jedem Punkte von BC Null ist, muss natürlich auch das resultierende Moment dieser Spannungen gleich Null sein.

In der Seite BD hingegen ist für jeden Punkt $t_y = 0$, weil für diese Seite $\tau = 90^\circ$ und die Umfangsbedingung $t_x \cos 90 - t_y \sin 90 = 0$ d. h. $t_y = 0$ ist.

Wir wählen demnach den Punkt, in welchem $t_y = 0$ sein soll, so dass zugleich

$$\int_0^a t_y \, y \, dy = 0 \text{ ist.}$$

Die zwei Bedingungsgleichungen sind nun

$$(\gamma) \dots \beta_1 + \beta_2 a^2 (3 - 0,6\varphi^2) + \beta_3 a^4 (5 - 6\varphi^2 + \varphi^4) + \beta_4 a^6 (7 - 21\varphi^2 + 9\varphi^4 - \varphi^6) = -1$$

$$(\delta) \dots \beta_1 + \beta_2 a^2 (0,6 - 3\varphi^2) + \beta_3 a^4 (\varphi^2 - 6\varphi^2 + 5\varphi^4) + \beta_4 a^6 (\varphi^2 - 9\varphi^2 + 21\varphi^4 - 7\varphi^6) = 1.$$

Die Auflösung der vier Gleichungen (α), (β), (γ) und (δ) liefert

$$\beta_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{\varphi^6 - 127\varphi^4 + 127\varphi^2 - 1}{\varphi^6 + 11\varphi^4 + 11\varphi^2 + 1}$$

$$\beta_2 = \frac{5}{8a^2} \cdot \frac{7\varphi^4 - 26\varphi^2 + 7}{\varphi^6 + 11\varphi^4 + 11\varphi^2 + 1}$$

$$\beta_3 = \frac{35}{8a^4} \cdot \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^6 + 11\varphi^4 + 11\varphi^2 + 1}$$

$$\beta_4 = \frac{9}{8a^6} \cdot \frac{1}{\varphi^6 + 11\varphi^4 + 11\varphi^2 + 1}$$

Die gefundenen Werthe von β_1 , β_2 , β_3 und β_4 substituieren wir in die Ausdrücke für t_y und t_x und bilden dann die Gleichung

$$4 \int_0^a dy \int_0^{\varphi a} dz \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y} + z \right) z - \left(\frac{\partial F}{\partial z} - y \right) y \right] = M_x$$

aus welcher

$$(7) \dots E' \delta = \frac{15}{8} \frac{M_x}{\varphi^3 a^4} \cdot \frac{\varphi^6 + 11\varphi^4 + 11\varphi^2 + 1}{10\varphi^4 + 82\varphi^2 + 10}$$

folgt.

Die absolut grösste Spannung ist in der Mitte der kürzeren Seite, für welche nach unserer Annahme $z = 0$ $y = a$ ist.

$$(8) \dots \max. t = \frac{15 M_x}{64 a^3 \varphi} \cdot \frac{7\varphi^4 + 180\varphi^2 + 56}{10\varphi^4 + 82\varphi^2 + 10}.$$

Diese Resultate können wir mit den Versuchen, welche über die Torsion quadratischer Stäbe vorliegen, vergleichen und prüfen.

Für das Quadrat ist $\varphi = 1$, weshalb

$$\delta = \frac{15}{34} \frac{M_x}{a^4 E'}, \text{ und}$$

$$\max. t = 0,558 \frac{M_x}{a^3}$$

Führen wir statt der halben Seite a die ganze ein, $a = \frac{d}{2}$

so ist

$$\delta = \frac{15 \cdot 16}{34} \frac{M_x}{d^4 E'} = 7,06 \frac{M_x}{d^4 E'}$$

$$\max. t = 0,558 \cdot 8 \frac{M_x}{d^3 E'} = 4,467 \frac{M_x}{d^3 E'}.$$

Für den Kreis ist bekanntlich $F = 0$, weshalb

$$t_x = E' \delta z$$

$$t_y = -E' \delta y$$

$$\text{und} \quad \cos \tau = \frac{-y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \quad \sin \tau = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

$$\text{daher } t_x \cos \tau - t_y \sin \tau = 0 = -E' \delta y z + E' \delta y z.$$

Wir haben demnach ganz genau

$$M_x = E' \delta \iint (z^2 + y^2) dy \cdot dz = E' \delta \cdot \frac{d^4 \pi}{32}$$

somit

$$\delta = \frac{32}{\pi} \frac{M_x}{d^4 E'} = 10,2 \frac{M_x}{d^4 E'}.$$

Nennen wir den Verdrehungswinkel beim Kreise δ_k , jenen des Quadrates mit δ_q , so ist, wenn M_x und d für beide gleich sind,

$$\delta_q = C \frac{M_x}{d^4 E'}, \text{ wogegen } \delta_k = 10,2 \frac{M_x}{d^4 E'}.$$

Nach Bauschinger's Versuchen (Essais de resistance des fontes, fers et aciers de l'usine de Reschitza) erhält man folgende Werthe von C , wenn man die Verdrehungen auf die Dicke des Cylinders reducirt und bis zu der in der zweiten Columnne aufgeführten grössten Belastung summirt.

| Seite Nr. | Grösste Belastung | Verdrehung | | | C |
|--------------|------------------------------|------------|----------------------|---------------------|-------|
| | | Quadrat | | Kreis δ_k | |
| | | Beobacht. | Reduc. δ_q | | |
| 82 | 1 ^{tes} \times 8 | 10,08 | 10,22 | 14,24 | 7,31 |
| 83 | 5,5 | 7,18 | 7,32 | 10,97 | 6,82 |
| 84 | 4,5 | 4,85 | 4,87 | 7,13 | 6,97 |
| 85 | 2 ^{tes} \times 4. | 3,59 | 3,65 | 5,76 | 6,46 |
| 86 | 2 ^{tes} \times 4. | 5,79 | 5,86 | 8,65 | 6,90 |
| 87 | 1 ^{tes} \times 10 | 21,43 | 21,66 | 30,43 | 7,26 |
| 88 | 5 | 5,98 | 6,05 | 8,75 | 7,05 |
| 89 | 5 | 6,01 | 6,09 | 8,41 | 7,38 |
| 90 | 1 ^{tes} \times 6 | 8,95 | 9,06 | 12,56 | 7,28 |
| 91 | 1 ^{tes} \times 4 | 5,03 | 5,10 | 7,05 | 7,38 |
| Zusammen | | | | | 70,81 |

Im Durchschnitte $C \frac{70,81}{10} = 7,081$, gegen den theoretischen Werth $C = 7,06$ eine Abweichung von $\frac{0,021}{7,06} = 0,003$ d. i. $\frac{3}{1000}\%$.

Die Theorie stimmt sonach mit den Versuchen sehr gut überein. Eine noch genauere Rechnung anzustreben ist überflüssig, weil die aus den Versuchen resultirenden Einzelwerthe von C zu stark schwanken.

Die älteren Ausdrücke geben für die grösste Spannung zufällig recht gute Werthe; dagegen weichen die Werthe für den Verdrehungswinkel von der Wahrheit stark ab.

Die ältesten Ausdrücke sind

$$\max. t = \frac{3\sqrt{2} M_x}{d^3} = 4,24 \frac{M_x}{d^3}$$

$$\delta = 6 \frac{M_x}{d^4 E'}.$$

Die neueren von Grashof (Theorie der Elasticität und Festigkeit, 2. Aufl. S. 140, Gl. 236 und S. 144, Gl. 246) angegebenen Ausdrücke sind

$$\max. t = \frac{9 \cdot 8}{16} \frac{M_x}{d^3} = 4,5 \frac{M_x}{d^3}$$

$$\delta = 9 \frac{M_x}{d^4 E'}.$$

Die letztere Spannung ist fast ganz genau, aber die Verdrehung ist ungenauer als nach der älteren Formel, denn sie weicht von der Wahrheit um 27% ab, während die ältere nur um 15% zu klein ist.

III. Biegungselasticität.

a) Bestimmung der Normalspannung.

Zur Bestimmung der Spannungen müssen wir, falls der Stab krumm ist, von Querschnitt zu Querschnitt ein neues Achsensystem legen, denn es kann immer nur ein Stabstück von der Länge dx als gerade betrachtet werden, weil nur ein unendlich kleines Stück der Trägerachse mit der x Achse zusammenfällt; auch können die Ausdrücke für die Verschiebungen ξ, η, ζ nur bei geraden Trägern unmittelbar gebraucht werden, ihre Differentialien aber sind auch bei krummen Trägern gültig.

Für dasjenige unendlich kleine Trägerstück, welches mit der x Achse zusammenfällt, bestehen alle Gleichungen, welche in der Einleitung angeführt wurden; insbesondere ist

$$\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial t_x}{\partial y} + \frac{\partial t_y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial t_x}{\partial x} = \frac{\partial t_y}{\partial x} = 0.$$

Mit Hilfe der letzteren Bedingungen lässt sich der Ausdruck für die Normalspannung ganz unzweideutig entwickeln.

Sehr häufig machen wir dabei von dem bekannten Satze der Analysis Gebrauch, dass der Werth des Differentialquotienten einer Function mehrerer Veränderlicher von der Reihenfolge der Differentiation unabhängig ist. Differenziren wir die erste Gleichung nach x , so kommt

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial t_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial t_y}{\partial z} \right) = 0 = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial t_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial t_y}{\partial x} \right)$$

also mit Rücksicht auf die zweite Bedingung

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0.$$

Nun setzen wir für t_x und t_y ihre Ausdrücke, nämlich

$$t_x = E' \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

$$t_y = E' \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)$$

in die zweite Bedingung ein und erhalten

$$\frac{\partial t_x}{\partial x} = E' \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial t_y}{\partial x} = E' \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Da aber

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{s}{E}$$

so können wir die letzteren Ausdrücke auch folgender Weise schreiben

$$\frac{1}{E} \frac{ds}{dy} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{1}{E} \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0.$$

Nun differenziren wir die vorletzte Gleichung nach z , die letzte aber nach y und addiren dieselben

$$\frac{2}{E} \frac{\partial^2 s}{\partial z \partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) = 0$$

oder auch nach Umkehrung der Reihenfolge der Differentiationen

$$\frac{2}{E} \frac{\partial^2 s}{\partial z \cdot \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = 0.$$

Es ist aber die dritte Schubspannung gleich Null, d. h.

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$$

also auch

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z \cdot \partial y} = 0.$$

Wir beachten nun die folgenden partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{E} s, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\nu}{E} s, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{\nu}{E} s$$

und erhalten durch Integration

$$\xi = F_1(y, z) + \frac{1}{E} \int s dx$$

$$\eta = F_2(x, z) - \frac{\nu}{E} \int s dy$$

$$\zeta = F_3(x, y) - \frac{\nu}{E} \int s dz.$$

Die Ausdrücke für t_y und t_z sind jetzt

$$t_y = E' \left(\frac{\partial F_1(y, z)}{\partial z} + \frac{1}{E} \int \frac{\partial s}{\partial z} dx + \frac{\partial F_3(x, y)}{\partial x} - \frac{\nu}{E} \int \frac{\partial s}{\partial x} dz \right)$$

$$t_z = E' \left(\frac{\partial F_1(y, z)}{\partial y} + \frac{1}{E} \int \frac{\partial s}{\partial y} dx + \frac{\partial F_2(x, z)}{\partial x} - \frac{\nu}{E} \int \frac{\partial s}{\partial x} dy \right).$$

Hieraus ergeben sich die Bedingungen

$$\frac{\partial t_y}{\partial x} = E' \left(\frac{1}{E} \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial^2 F_3(x, y)}{\partial x^2} \right) = 0.$$

$$\frac{\partial t_z}{\partial x} = E' \left(\frac{1}{E} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial^2 F_2(x, z)}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Die vorletzte Gleichung differenzieren wir nach z , die letzte nach y und erhalten

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = 0.$$

Die Normalspannung enthält demnach die Grössen y und z nur in der ersten Potenz, auch fehlt das Glied mit dem Producte yz , weil $\frac{\partial^2 s}{\partial y \cdot \partial z} = 0$ ist.

Wir setzen nun

$$s = a + by + cz$$

wo a , b und c für den Querschnitt, in welchem der Anfangspunkt liegt, absolute Constante sind, nachdem ja $x = 0$ die Gleichung jenes Querschnittes ist.

Zur Bestimmung der Constanten dienen die Wirkungen der äusseren Kräfte.

Es sei R_x die fördernde Kraft längst der Achse der x ; M_y das Moment um die Achse der y und zwar sei dasselbe positiv, wenn es von der $+x$ zur $+z$ dreht, M_z das Moment um die Achse der z u. z. positiv, wenn es von der $+x$ gegen $+y$ dreht. Aus Fig. 1 ist ersichtlich, dass die Gesamtwirkungen der Normalspannungen

$$\int \int s dy dz, \quad - \int \int s z dy dz \quad \text{und} \quad - \int \int s y dy dz$$

sind. Diese Gesamtwirkungen sind bei richtiger Vertheilung

der Normalspannung den äusseren Wirkungen äquivalent, also ist

$$R_x = \int \int s dy dz$$

$$M_y = - \int \int s z dy dz$$

$$M_z = - \int \int s y dy dz.$$

Schreiben wir statt

$$dy \cdot dz = d^2 T,$$

so wird mit Rücksicht auf den Werth von s

$$R_x = \int \int a d^2 T + \int \int b y d^2 T + \int \int c z d^2 T$$

$$M_y = - \int \int a z d^2 T - \int \int b y z d^2 T - \int \int c z^2 d^2 T$$

$$M_z = - \int \int a y d^2 T - \int \int b y^2 d^2 T - \int \int c y z d^2 T.$$

Da der Schwerpunkt des Querschnittes der Anfangspunkt der Coordinaten und y nebst z die Hauptachsen sind, ist

$$\int \int y d^2 T = 0$$

$$\int \int z d^2 T = 0$$

$$\int \int y z d^2 T = 0.$$

Bezeichnet T die Fläche, J_y das Trägheitsmoment des Querschnittes um die Achse der y , J_z jenes um die z Achse, so ist

$$R_x = a T, \quad M_y = -c J_y, \quad M_z = -b J_z,$$

weshalb

$$a = \frac{R_x}{T}, \quad c = -\frac{M_y}{J_y}, \quad b = -\frac{M_z}{J_z}$$

und die Normalspannung ist

$$(9) \dots \dots s = \frac{R_x}{T} - \frac{M_z}{J_z} \cdot y - \frac{M_y}{J_y} \cdot z.$$

b) Bestimmung der Schubspannungen.

Die Bestimmung der Schubspannungen setzt die Kenntniss der drei Functionen $F_1(y, z)$, $F_2(x, z)$ und $F_3(x, y)$ voraus. Die zwei letzteren ergeben sich sehr leicht; man bedarf nur der Ausdrücke

$$\eta = F_2(x, z) - \frac{\nu}{E} \int s dy$$

$$\zeta = F_3(x, y) - \frac{\nu}{E} \int s dz$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0.$$

$$\text{Mit Rücksicht darauf, dass } \frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{M_z}{J_z}, \quad \frac{\partial s}{\partial z} = -\frac{M_y}{J_y}$$

erhält man aus den obigen drei Gleichungen

$$\frac{\partial F_2(x, z)}{\partial z} + \frac{\nu}{E} \frac{M_y}{J_y} y + \frac{\partial F_3(x, y)}{\partial y} + \frac{\nu}{E} \frac{M_z}{J_z} z = 0.$$

Natürlich können nur diejenigen Glieder, welche y enthalten, für sich, und jene welche z enthalten, ebenfalls für sich, gleich Null sein; somit erhält man

$$\frac{\partial F_2(x, z)}{\partial z} + \frac{\nu}{E} \frac{M_z}{J_z} \cdot z + a = 0$$

$$\frac{\partial F_3(x, y)}{\partial y} + \frac{\nu}{E} \frac{M_y}{J_y} y - a = 0,$$

worin a nur eine Function von x sein kann.

Man erhält nun, unter b_2 und b_3 ebenfalls Functionen von x verstehend

$$F_2(x, z) = -\frac{\nu M_z z^2}{2 E J_z} + az + b_2$$

$$F_3(x, y) = -\frac{\nu M_y y^2}{2 E J_z} - ay + b_3.$$

Hiermit wird

$$\eta = -\frac{\nu M_z}{2 E J_z} z^2 + az + b_2 - \frac{\nu}{E} \int s dy$$

$$\zeta = -\frac{\nu M_y}{2 E J_z} y^2 - ay + b_3 - \frac{\nu}{E} \int s dz.$$

Weil der Anfangspunkt der Coordinaten vor und nach der Belastung im Schwerpunkte des Querschnittes sich befindet, muss $\eta = \zeta = 0$ sein, wenn $x = y = z = 0$ ist; hieraus folgt

$$[b_2]_{x=0} = [b_3]_{x=0} = 0.$$

Weil ferner die x Achse die elastische Linie, d. i. die deformirte Achse des Trägers, berührt, ist

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0,$$

wenn $y = z = 0$ ist, also auch

$$\left(\frac{\partial b_2}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial b_3}{\partial x}\right)_{x=0} = 0.$$

Beschränken wir uns auf die Bestimmung der Schubspannungen, welche im Querschnitte dessen ursprüngliche Gleichung $x = 0$ ist, auftreten, so wird

$$t_y = E' \left[\frac{\partial F_1(y, z)}{\partial z} + \left(\frac{\partial F_3(y, x)}{\partial x} \right)_{x=0} - \frac{\nu}{E} \int \frac{\partial s}{\partial x} dz \right]$$

$$t_z = E' \left[\frac{\partial F_1(y, z)}{\partial y} + \left(\frac{\partial F_2(z, x)}{\partial x} \right)_{x=0} - \frac{\nu}{E} \int \frac{\partial s}{\partial x} dz \right]$$

oder mit Rücksicht auf den Werth von

$$F_2(x, z) \text{ und } F_3(x, y)$$

$$t_y = E' \left[\frac{\partial F_1(y, z)}{\partial z} - \frac{\nu y^2}{2 E J_z} \frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial x} z - \frac{\nu}{E} \int \frac{\partial s}{\partial x} dz \right]$$

$$t_z = E' \left[\frac{\partial F_1(y, z)}{\partial y} - \frac{\nu z^2}{2 E J_z} \frac{\partial M_z}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x} y - \frac{\nu}{E} \int \frac{\partial s}{\partial x} dy \right].$$

Es ist aber

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} = -R_z, \quad \frac{\partial M_z}{\partial x} = -R_y$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial R_x}{T \partial x} - \frac{y}{J_z} \frac{\partial M_z}{\partial x} - \frac{z}{J_y} \frac{\partial M_y}{\partial x} = \frac{R_y \cdot y}{J_z} + \frac{R_z \cdot z}{J_y}$$

weshalb

$$t_y = E' \left[\frac{\partial F_1(y, z)}{\partial z} + \frac{\nu y^2 R_z}{2 E J_z} + \frac{\partial a}{\partial x} z - \frac{\nu R_y}{E J_z} yz - \frac{\nu R_z}{2 E J_y} z^2 \right]$$

$$t_z = E' \left[\frac{\partial F_1(y, z)}{\partial y} + \frac{\nu z^2 R_y}{2 E J_z} - \frac{\partial a}{\partial x} y - \frac{\nu R_y y^2}{E J_z} - \frac{\nu R_z zy}{E J_y} \right].$$

Setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass $R_z = 0$ ist, und schreiben wir statt

$$E' F_1(y, z) = \frac{R_y}{2 \varepsilon J_z} \cdot F_1, \quad E' \frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{\delta R_y}{2 \varepsilon J_y}$$

so wird

$$t_z = \frac{R_y}{2 \varepsilon J_z} \left[\frac{\partial F_1}{\partial y} + \delta z + \frac{\nu}{2} (z^2 - y^2) \right]$$

$$t_y = \frac{R_y}{2 \varepsilon J_z} \left[\frac{\partial F_1}{\partial z} - \delta y - \nu yz \right].$$

Es bleibt noch die letzte Function F_1 zu bestimmen übrig. Hierzu dient die Bedingung

$$\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial t_z}{\partial y} + \frac{\partial t_y}{\partial z} = 0,$$

welche mit Rücksicht auf die Werthe von s , t_z , t_y und $R_z = 0$ folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{R_y}{J_z} y + \frac{1}{2 \varepsilon} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} - \frac{2 \nu R_y}{J_z} y \right) = 0.$$

Es ist aber $\varepsilon = 1 + \nu$ somit folgt

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} + \frac{2 R_y}{J_z} y = 0.$$

Man kann diese Function auf die, bei der Drehungs-elasticität behandelte Form reduciren, wenn man

$$F_1 = F - \frac{R_y}{J_z} y z^2$$

setzt. Dann ist

$$t_z = \frac{R_y}{2 \varepsilon J_z} \left[\frac{\partial F}{\partial y} + \delta z - \frac{(2 - \nu) z^2 + \nu y^2}{2} \right],$$

$$t_y = \frac{R_y}{2 \varepsilon J_z} \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \delta y - (2 + \nu) yz \right]$$

und

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0.$$

Wir erhalten daher im Allgemeinen, unter $i = \sqrt{-1}$ verstanden, wieder

$$F = \sum \alpha_n \frac{(y + zi)^n + (y - zi)^n}{2n} + \sum \beta_n \frac{(y + zi)^n - (y - zi)^n}{2in}$$

Ausser der Umfangsbedingung

$$t_y \sin \tau - t_z \cos \tau = 0$$

sind noch die auf das Gleichgewicht mit den äusseren Kräften bezüglichen Gleichungen zu erfüllen.

Dieselben sind

$$\iint t_z d^2 T = R_y$$

$$\iint t_y d^2 T = 0$$

$$\iint (t_z \cdot z - t_y \cdot y) d^2 T = 0.$$

Bei der Bestimmung der Constanten der F Function sind zu allererst die letzten drei Gleichungen zu berücksichtigen; ist dies geschehen, dann kann der Umfangsbedingung in so vielen Punkten entsprochen werden, als man Constante zu bestimmen übrig hat.

Deren Zahl kann selbstverständlich nach Belieben gewählt werden.

In der Regel ist der Querschnitt gegen jene Achse symmetrisch, zu welcher die Schubkraft parallel ist; in unserem Falle also zur y Achse.

In diesem Falle wird der Werth von t_z dem Zeichen und der Grösse nach unverändert bleiben, wenn man $+z$ in $-z$ verwandelt. Es ist aber

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sum \alpha_n \frac{(y + zi)^{n-1} + (y - zi)^{n-1}}{2} + \sum \beta_n \frac{(y + zi)^{n-1} - (y - zi)^{n-1}}{2i}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \sum \alpha_n i \frac{(y + zi)^{n-1} - (y - zi)^{n-1}}{2} + \sum \beta_n \frac{(y + zi)^{n-1} + (y - zi)^{n-1}}{2}$$

Soll $\frac{\partial F}{\partial y}$ unverändert bleiben, wenn man $-z$ statt $+z$ setzt, so muss die zweite Summe Null sein, denn sie enthält die ungeraden Potenzen von z ; wir erhalten daher

$$F = \sum \alpha_n \frac{(y+zi)^n + (y-zi)^n}{2n}$$

Zugleich muss aber auch $\delta = 0$ sein, weil dasselbe ebenfalls ein Glied mit einer ungeraden Potenz von z in der Spannung t_z liefert.

Ist der Querschnitt also gegen die y Achse symmetrisch, so ist

$$(10) \begin{cases} t_z = \frac{R_y}{2\varepsilon J_z} \left[\sum \alpha_n \frac{(y+zi)^{n-1} + (y-zi)^{n-1}}{2} - \frac{(2-\nu)z^2 + \nu y^2}{2} \right] \\ t_y = \frac{R_y}{2\varepsilon J_z} \left[\sum \alpha_n i \frac{(y+zi)^{n-1} - (y-zi)^{n-1}}{2} - (2+\nu)yz \right] \end{cases}$$

Ist der Querschnitt in Bezug auf beide Achsen symmetrisch, so muss t_z auch dann ganz ungeändert bleiben, wenn man $-y$ statt $+y$ einsetzt.

Dies ist aber nur dann möglich, wenn t_z nur gerade Potenzen von y enthält, weshalb $n-1$ eine gerade Zahl sein muss. Die Spannungen werden dann

$$(11) \begin{cases} t_z = \frac{R_y}{2\varepsilon J_z} \left[\sum \alpha_{n+1} \frac{(y+zi)^{2n} + (y-zi)^{2n}}{2} - \frac{(2-\nu)z^2 + \nu y^2}{2} \right] \\ t_y = \frac{R_y}{2\varepsilon J_z} \left[\sum \alpha_{n+1} i \frac{(y+zi)^{2n} - (y-zi)^{2n}}{2} - (2+\nu)yz \right] \end{cases}$$

Im früheren Falle hört die Bedingung

$$\iint t_y d^2 T = 0$$

auf, Bestimmungsgleichung zu sein, weil sie identisch erfüllt wird, und

$$\iint (t_z z - t_y \cdot y) d^2 T = 0$$

übergeht in

$$\iint t_y \cdot y d^2 T = 0.$$

Im letzteren Falle sind beide Gleichungen identisch erfüllt, weshalb ausser der Umfangsbedingung nur

$$\iint t_z d^2 T = R_y$$

als Bestimmungsgleichung übrig bleibt.

Zur Erläuterung des Verfahrens dienen die folgenden Beispiele. Es sind die Schubspannungen eines Rechteckes zu bestimmen.

Behalten wir 4 Glieder des Ausdruckes für F bei, so können wir folgende Bedingungen erfüllen.

1. Die Schubspannungen in den vier Eckpunkten sind gleich Null.

Da das Rechteck gegen beide Achsen symmetrisch ist, erhält man

$$\begin{aligned} t_z &= \frac{R_y}{2\varepsilon J_z} \left[\alpha_1 - \left(\alpha_2 + 1 - \frac{\nu}{2} \right) z^2 + \left(\alpha_2 - \frac{\nu}{2} \right) y^2 \right. \\ &\quad \left. + \alpha_3 (y^4 - 6y^2 z^2 + z^4) + \alpha_4 (y^6 - 15y^4 z^2 + 15y^2 z^4 - z^6) \right] \\ t_y &= -\frac{R_y}{\varepsilon J_z} \left[\left(\alpha_2 + 1 + \frac{\nu}{2} \right) yz + 2\alpha_3 (y^3 z - yz^3) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_4 (3y^5 z - 10y^3 z^3 + 3yz^5) \right]. \end{aligned}$$

Benutzen wir die Coten der Fig. 3, so ergeben sich für die Eckpunkte die Gleichungen

$$(a) \dots \alpha_1 + \left(\alpha_2 - \frac{\nu}{2} \right) a^2 - \left(\alpha_2 + 1 - \frac{\nu}{2} \right) \varphi^2 a^2 + \alpha_3 a^4 (1 - 6\varphi^2 + \varphi^4) + \alpha_4 a^6 (1 - 15\varphi^2 + 15\varphi^4 - \varphi^6) = 0$$

$$(b) \dots \left(\alpha_2 + 1 + \frac{\nu}{2} \right) a^2 + 2\alpha_3 a^4 (1 - \varphi^2) + \alpha_4 a^6 (3 - 10\varphi^2 + 6\varphi^4) = 0.$$

2. Die Schubspannungen im Punkte C entsprechen der Umfangsbedingung.

Nachdem in diesem Punkte die Tangente zu z Achse parallel ist, folgt $\tau = 0$ und die Umfangsbedingung ist

$$t_z = 0.$$

Weil die Coordinaten von C $y = a$, $z = 0$ sind, erhält man die Gleichung

$$(c) \dots \alpha_1 + \left(\alpha_2 - \frac{\nu}{2} \right) a^2 + \alpha_3 a^4 + \alpha_4 a^6 = 0.$$

3. Die Gesamtwirkung der t_z Spannungen ist der Schubkraft gleich, nämlich

$$\iint t_z d^2 T = R_y.$$

Nach unserer Bezeichnung ist

$$\iint d^2 T = T$$

$$\iint y^2 d^2 T = J_z$$

$$\iint z^2 d^2 T = J_y$$

Setzen wir noch

$$C_3 = \iint (y^4 - 6y^2 z^2 + z^4) d^2 T$$

$$C_4 = \iint (y^6 - 15y^4 z^2 + 15y^2 z^4 - z^6) d^2 T$$

so liefert obige Bedingung die Gleichung

$$2\varepsilon J_z = \alpha_1 T + \alpha_2 (J_z - J_y) - \left[\frac{\nu}{2} J_z + \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) J_y \right] + C_3 \alpha_3 + C_4 \alpha_4.$$

Bekanntlich schwankt ν zwischen $1/4$ und $1/3$; nehmen wir $\nu = 0,3$, so ist $\varepsilon = 1,3$ und die letzte Gleichung wird

$$(12) \dots 2,75 J_z + 0,85 J_y = \alpha_1 T + \alpha_2 (J_z - J_y) + C_3 \alpha_3 + C_4 \alpha_4.$$

Wir setzen nun noch

$$\alpha_1 = \alpha_0 a^2$$

und ordnen die Gleichungen (a), (b), (c), welche dann wie folgt lauten

$$\alpha_2 (1 - \varphi^2) + \alpha_3 a^2 (1 - 6\varphi^2 + \varphi^4) + \alpha_4 a^4 (1 - 15\varphi^2 + 15\varphi^4 - \varphi^6) = 0,15 + 0,85\varphi^2 - \alpha_0$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 a^2 (2 - 2\varphi^2) + \alpha_4 a^4 (3 - 10\varphi^2 + 3\varphi^4) = -1,15$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 a^2 + \alpha_4 a^4 = 0,15 - \alpha_0$$

Die Auflösung der Gleichungen führt auf folgende Werthe

$$\alpha_2 = \lambda_2 \alpha_0 + \mu_2$$

$$\alpha_3 = \lambda_3 \alpha_0 + \mu_3$$

$$\alpha_4 = \lambda_4 \alpha_0 + \mu_4$$

$$n = \varphi^6 + 6\varphi^4 + 9\varphi^2 + 4$$

$$\lambda_2 = -\frac{\varphi^6 + 4\varphi^4 + 3\varphi^2 + 12}{n} \quad \mu_2 = \frac{0,15\varphi^6 - 0,8\varphi^4 + 8,85\varphi^2 + 11,3}{n}$$

$$\lambda_3 = -\frac{2\varphi^4 + 5\varphi^2 - 12}{n} \quad \mu_3 = \frac{1,7\varphi^4 + 9,5\varphi^2 - 16,2}{n}$$

$$\lambda_4 = -\frac{\varphi^2 + 4}{n} \quad \mu_4 = \frac{0,7\varphi^2 + 5,5}{n}$$

Wenn man diese Werthe in die Gleichung (12) einführt, erhält man

$$\alpha_0 = \frac{(2,75 - \mu_2) J_z + (0,85 + \mu_2) J_y - \frac{\mu_3 C_3}{a^2} - \frac{\mu_4 C_4}{a^6}}{T a^2 + \lambda_2 (J_z - J_y) + \frac{\lambda_3 C_3}{a^2} + \frac{\lambda_4 C_4}{a^4}}$$

Durch Integration endlich findet man

$$C_3 = \frac{3\varphi - 10\varphi^3 + 3\varphi^5}{15} a^6, \quad C_4 = \left(\frac{\varphi}{7} - \varphi^3 + \varphi^5 - \frac{\varphi^7}{7} \right) a^8.$$

Für das Quadrat insbesondere ist $\varphi = 1$, und damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -1 & \mu_2 &= 0,09 \\ \lambda_3 &= 0,25 & \mu_3 &= -0,25 & C_3 &= -\frac{16}{15} a^6 \\ \lambda_4 &= -0,25 & \mu_4 &= 0,31 & C_4 &= 0. \end{aligned}$$

$$J_y = J_z = \frac{4a^4}{3}$$

$$\alpha_0 = \frac{17}{14} = 1,2143, \quad \alpha_2 = -1,1243, \quad \alpha_3 = \frac{0,0536}{a^2}$$

$$\alpha_4 = \frac{0,00643}{a^4}.$$

Die Spannungen sind

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{R_y}{T} \left[1,8214 - 1,9114 \frac{y^2}{a^2} + 0,4116 \frac{z^2}{a^2} \right. \\ &\quad \left. + 0,0804 \frac{y^4 - 6y^2 z^2 + z^4}{a^4} + 0,0096 \frac{y^6 - 15y^4 z^2 + 15y^2 z^4 - z^6}{a^6} \right] \\ \varepsilon_t &= -\frac{R_y}{T} \left[0,0768 + 0,3216 \frac{y^2 - z^2}{a^2} \right. \\ &\quad \left. + 0,0192 \frac{3y^4 - 10y^2 z^2 + 3z^4}{a^4} \right] \frac{yz}{a^2}. \end{aligned}$$

Die absolut grösste Spannung entsteht im Punkte, dessen Coordinaten $y = 0$ $z = a$ und ist

$$\max : (\varepsilon_t) = 2,30 \frac{R_y}{T}.$$

Die älteren Ausdrücke für die grösste Schubspannung liefern schon bei weitem schlechtere Werthe als bei der Torsion. In Grashof's oben erwähntem Werke (S. 127, Gleichung 205) findet sich

$$\max : t = 1,5 \frac{R_y}{T}$$

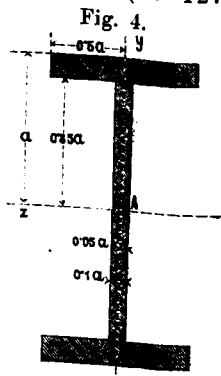
somit

$$\max (\varepsilon_t) = 1,3 \times 1,5 \frac{R_y}{T} = 1,85 \frac{R_y}{T}$$

also um 24% zu klein.

Dieselben Formeln lassen sich auch auf einen I förmigen Querschnitt anwenden. Für den in Fig. 4 dargestellten ist

$$\begin{aligned} T_3 &= 0,47 a^2, & J_z &= 0,2982 a^4, & J_y &= 0,0251 a^4 \\ C_3 &= 0,1152 a^6, & C_4 &= -0,0275 a^8 \\ \varphi &= 0,5, & n &= 6,6406, \\ \lambda_2 &= -1,960, & \mu_2 &= 1,361, \\ \lambda_3 &= 1,600, & \mu_3 &= -2,066, \\ \lambda_4 &= -0,640, & \mu_4 &= 0,855, & \alpha_0 &= 5,357. \\ \alpha_2 &= -9,139, & \alpha_3 &= \frac{6,495}{a^2}, & \alpha_4 &= -\frac{2,573}{a^4} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{R_y}{T} \left(4,222 + 6,532 \frac{z^2}{a^2} - 7,320 \frac{y^2}{a^2} \right. \\ &\quad \left. + 5,1184 \frac{y^4 - 6y^2 z^2 + 3z^4}{a^4} - 2,0277 \frac{y^6 - 15y^4 z^2 + 15y^2 z^4 - z^6}{a^6} \right) \\ \varepsilon_t &= \frac{R_y}{T} \left(12,59 - 20,47 \frac{y^2 - z^2}{a^2} + 4,055 \frac{3y^4 - 10y^2 z^2 + 3z^4}{a^4} \right) \frac{yz}{a^2} \end{aligned}$$

Die grösste Spannung tritt in jenem Punkte auf, dessen Coordinaten $y = 0$ und $z = 0,05 a$; sie ist

$$\max (\varepsilon_t) = 4,24 \frac{R_y}{T}.$$

Bei einem solchen Querschnitte wären jedenfalls noch mehr Glieder der Reihe beizubehalten, damit man die grösste Spannung bestimmt genau genug erhalte.

c) Bestimmung der Gestalt der elastischen Linie.

Wir wollen uns mit dem Falle begnügen, dass nur um die z Achse ein Moment dreht und nur eine zur y Achse parallele Schubkraft auftritt, endlich dass der Querschnitt in Bezug auf die y Achse symmetrisch ist und dass die xy Ebene die ursprüngliche Achse in ihrer ganzen Länge enthalte. Die Achse des Trägers muss also ursprünglich entweder eine gerade oder einfach gekrümmte Linie sein.

Den Krümmungs-Halbmesser der Projection der elastischen Linie auf die Ebene der xy nennen wir ρ_1 , jenen der Projection auf die xz Ebene ρ_2 und haben selbe die Werthe

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\left[1 + \left(\frac{dy + d\eta}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left(\frac{d^2 y + d^2 \eta}{dx^2} \right)} \\ \rho_2 &= \frac{\left[1 + \left(\frac{dz + d\zeta}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left(\frac{d^2 z + d^2 \zeta}{dx^2} \right)}. \end{aligned}$$

Da die elastische Linie die x Achse berührt, ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{d\eta}{dx} = \frac{d\zeta}{dx} = 0$$

weshalb

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^2 \eta}{dx^2}} \\ \rho_2 &= \frac{1}{\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 \zeta}{dx^2}} \end{aligned}$$

oder

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{1}{\rho_1}; \quad \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 \zeta}{dx^2} = \frac{1}{\rho_2}.$$

Die Krümmungs-Halbmesser der Projectionen der ursprünglichen Trägerachse sind aber

$$r_1 = \frac{1}{\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)} \quad \text{und} \quad r_2 = \frac{1}{\left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right)}$$

weshalb

$$\frac{1}{r_1} + \frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{1}{\rho_1}, \quad \frac{1}{r_2} + \frac{d^2 \zeta}{dx^2} = \frac{1}{\rho_2}.$$

Es handelt sich demnach nur noch um die Bestimmung von

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 \zeta}{dx^2}.$$

Wir besitzen die Beziehung

$$\frac{\partial t_x}{\partial x} = E' \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) = 0, \text{ und}$$

$$\frac{\partial t_y}{\partial x} = E' \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \cdot \partial z} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) = 0,$$

woraus

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$$

folgt.

Nachdem $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{s}{E}$ und $s = \frac{R_x}{T} - \frac{M_z}{J_z} y - \frac{M_y}{J_y} z$ ist, erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{M_z}{E J_z}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{M_y}{J_y E}.$$

Wenn, wie wir vorausgesetzt, $M_y = 0$ ist, wird $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0$

weshalb

$$(13) \dots \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{r_1} = \frac{M_z}{J_z E}$$

$\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{r_2} = 0$ d. h. $\rho_2 = r_2 = \infty$ ist, wenn die Achse

eine ebene Curve ist.

Will man den Contingenzwinkel bestimmen, so hat man die Gleichung (13) nur mit dem Elemente des Bogens zu multipliciren. Ist z. B. dl das Element des Bogens der elastischen Linie, so ist

$$\frac{dl}{\rho_1} = d\omega$$

der Contingenzwinkel, also

$$d\omega - \frac{dl}{r_1} = \frac{M_z dl}{J_z E}.$$

Wenn man berücksichtigt, dass die Normalspannung im Schwerpunkte des Querschnittes

$$s_0 = \frac{R_x}{T}$$

ist, so kann das Element des Bogens der elastischen Linie durch das Element des Bogens der Trägerachse ausgedrückt werden. Bezeichnen wir Letzteres mit dl_0 , so ist

$$dl = dl_0 \left(1 + \frac{R_x}{E T} \right)$$

und

$$d\omega = \frac{dl_0}{r_1} \left(1 + \frac{R_x}{E T} \right) + \frac{M_z dl_0}{J_z E} \left(1 + \frac{R_x}{E T} \right).$$

Der ursprüngliche Contingenzwinkel ist $d\omega_0 = \frac{dl_0}{r_1}$

somit

$$d\omega = d\omega_0 \left(1 + \frac{R_x}{E T} \right) \left(1 + \frac{M_z r_1}{J_z E} \right).$$

Da sowohl $\frac{R_x}{E T}$ als auch $\frac{M_z r_1}{J_z E}$ kleine Grössen sind, kann man mit hinreichender Genauigkeit setzen

$$(14) \dots d\omega = d\omega_0 \left(1 + \frac{R_x}{E T} + \frac{M_z r_1}{J_z E} \right).$$

Natürlich lässt sich der Krümmungs-Halbmesser auch durch die auf ein unveränderliches Coordinaten-System bezogenen Coordinaten ausdrücken.

Am besten ist es, die Ebene der XY mit der Ebene xy zusammen fallen zu lassen, weil dann die elastische Linie, unter den gemachten Voraussetzungen, ihrer ganzen Länge nach in der Ebene enthalten ist. Die Y Achse wählen wir dabei mit einer solchen Richtung, dass ein Moment, welches von der $+x$ zur $+y$ dreht, auch von der $+X$ zur $+Y$ Achse drehe.

Dann ist

$$(15) \dots \frac{1}{\rho_1} = \frac{\frac{d^2 Y}{dX^2}}{\left[1 + \left(\frac{dY}{dX} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{1}{r_1} + \frac{M_z}{J_z E}.$$

Für gerade Träger insbesondere, wenn die feste X Achse die ursprüngliche Lage der Trägerachse besitzt, kann $\left(\frac{dY}{dX} \right)^2$ neben der Einheit weggelassen werden und $\frac{1}{r_1}$ ist absolut Null; deshalb ist

$$(16) \dots \frac{d^2 Y}{dX^2} = \frac{M_z}{J_z E}$$

die genügend genaue Differential-Gleichung der elastischen Linie.

Studie über aërodynamische Grundformeln an der Hand von Experimenten.

Von Ober-Ingenieur **Friedrich Ritter v. Lössl.**
II. Theil.

Vorgetragen von dem Verfasser in den Versammlungen der flugtechnischen Gruppe am 4. und 18. Februar 1881.

Die vorliegende Auseinandersetzung beschäftigte sich bis jetzt lediglich mit dem einfachen Windstosse, bezw. Luftwiderstande auf eine zur Bewegungsrichtung normal gestellte Fläche; und jetzt erst kann auf den weiteren und wichtigeren Gegenstand dieser Studie übergegangen werden, nämlich zu der Frage, wie sich schief gestellte Flächen gegen den Windstoss oder Luftwiderstand verhalten, und welche Formeln den hiebei auftretenden Wirkungen entsprechen. Um diese Wirkungen mit denen bei normal stehenden Ebenen leichter vergleichen und dann die hiebei sich ergebenden theoretischen Unterschiede constatiren zu können, kommen wir im Folgenden zuerst noch

auf die elementare Entwicklung der Druckformel für normal stehende Flächen zurück und gehen dann alsbald zur Theorie des Stosses oder Widerstandes bei schrägen Flächen über.

Stellt man eine ebene Fläche normal, d. i. rechtwinkelig gegen eine Luftströmung, so treffen die einzelnen Lufttheilchen senkrecht auf die Fläche und müssen daher ihre ganze bisherige Geschwindigkeit in der Stromrichtung vor dem dieselbe völlig hemmenden Hindernisse aufgeben. Wenn das, jedem Lufttheilchen innewohnende, Kraftmoment μv ist, so beträgt die Kraft aller Lufttheilchen Mv , worin M die Masse aller in einer Zeiteinheit, also per Secunde, zum Stoss gelangenden Theilchen

zusammen genommen bedeutet. Statt der Masse M können wir das Gewicht, dividirt durch die Acceleration der Schwere einsetzen, also $M = \frac{G}{g}$ und statt des Gewichtes G wiederum das Product aus dem Volumen mit der Dichte, also $G = V\gamma$ und statt des Volumens V endlich den Stromquerschnitt, multiplicirt mit der Geschwindigkeit, also $V = Fv$, so dass die Formel für die Kraft oder den Druck der ganzen per Secunde zum Stoss gelangenden Luftmasse sich folgendermassen gestaltet:

$$P = Mv = \frac{Gv}{g} = \frac{vV\gamma}{g} = \frac{v^2 F\gamma}{g},$$

unsere bereits wohlbekannte Luftdruckformel bei rechtwinkelig wirkendem Luftstosse, von deren experimenteller Prüfung und Bestätigung der I. Theil dieses Vortrages handelte. Es ist hiezu die Bemerkung nachzutragen, dass der Luftwiderstand dem Quadrate der Geschwindigkeit vollkommen proportional befunden wurde. Dies liess sich an dem Versuchs-Apparate am einfachsten dadurch constatiren, dass man, um irgend eine Rotations-Geschwindigkeit der Flügel zu verdoppeln, genau das vierfache Treibgewicht anwenden musste.

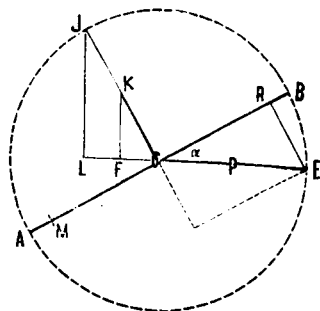
Neigen wir nunmehr die ebene Fläche F , so dass sie schräg im Strome steht und mit der Richtung desselben den Winkel α einschliesst, so werden sich gewiss die Druckverhältnisse anders gestalten, als bei der normal gestellten Ebene. Insbesondere entspricht es schon unserem natürlichen Gefühle und der alltäglichen Erfahrung, dass der in der Stromrichtung wirkende Druck, im Vergleich mit dem früher behandelten Falle, nunmehr geringer sein muss; und zwar geringer nicht bloss deshalb, weil jetzt der Querschnitt des wirkenden Luftstromes kleiner als die Fläche ist, sondern auch weil die einzelnen Lufttheilchen nicht mehr die ganze Bewegungs-Geschwindigkeit im Sinne der Stromrichtung aufzugeben genöthigt sind.

Wenn ein Luftstrom mit der Kraft P auf eine zu seiner Richtung schief gestellte Fläche trifft, so muss er zunächst einen auf die Fläche normal übergehenden Stoss oder Druck, nämlich den Normaldruck N ausüben. Dieser kann dann in einen parallel mit der Stromrichtung thätigen Druck, d. i. in den Paralleldruck K und in einen zu letzterem senkrecht wirkenden Druck G zerlegt werden. Letzteren nennen wir, wenn der Schiefstellungswinkel ein Verticalwinkel und die Stromrichtung eine horizontale ist, den Auftrieb oder das Hubvermögen.

Um die Grösse dieser Drücke, N , K , G und zunächst des Normaldruckes N , sich zu erklären, kann man auf verschiedenen Wegen eine Betrachtung anstellen. Man kann nämlich erstens den auf die Fläche treffenden Luftstrom, dessen Kraft P ist, als eine ununterbrochene Reihe von festen Körpern betrachten, welche fortwährend auf die schiefe Fläche stossen und in ihrer Gesamtkraft den Werth P darstellen.

Wenn diese Reihe stossender Körper (siehe Fig 9), deren Kraft $CE = P$ ist, auf die Fläche AB , welche unter dem Winkel α schief gestellt ist, in dem Angriffspunkte C trifft, so kann dieselbe nur mit einer Componente ihrer lebendigen Kraft in der zur Fläche normalen Richtung thätig auftreten, nämlich mit der Componente ER oder CK , d. i. mit der Kraftcomponente $P \sin \alpha$. Mit der anderen Componente KC oder CM , d. i. mit der Kraftcomponente $P \cos \alpha$ wird die Körperreihe keine Wirkung auf die Fläche ausüben, sondern mit diesem Reste ihrer lebendigen Kraft von der Fläche abgleiten, und, wenn die Körper unelastisch sind, in deren Richtung ihren Weg fortsetzen. Der an die Fläche abgegebene Normalstoss oder Normaldruck wäre also, wenn es sich um stossende feste Körper handeln würde, $N = P \sin \alpha$ und der daraus sich ergebende Parallel-Stoss oder Druck wäre nach abermaliger Zerlegung CF , d. i. $K = N \sin \alpha = P \sin^2 \alpha$, endlich der Auftrieb FA , d. i. $G = P \sin \alpha \cos \alpha$. Auf dieser Ableitung scheinen die althergebrachten und bis jetzt üblich gewesenen Formeln für den Luftstoss zu beruhen.

Fig. 9.



Setzt man nämlich die Kraft des Luftstromes $P = v^2 f \frac{\gamma}{g}$, worin f die Querschnittsfläche des wirkenden Stromes ist, so erhält man

$$N = v^2 f \sin \alpha \frac{\gamma}{g}, \quad K = v^2 f \sin^2 \alpha \frac{\gamma}{g} \quad \text{und} \quad G = v^2 f \sin \alpha \cos \alpha \frac{\gamma}{g}.$$

Führt man ferner statt des Querschnittes des betheiligten Luftstromes f , das Quadratmaass der schiefgestellten Fläche F ein, so wird $f = F \sin \alpha$ und deshalb $N = v^2 F \sin^2 \alpha \frac{\gamma}{g}$, $K = v^2 F \sin^3 \alpha \frac{\gamma}{g}$, endlich

$G = v^2 F \sin^2 \alpha \cos \alpha \frac{\gamma}{g}$, wozu frühere Autoren, wie schon erwähnt, eines Divisors und Coëfficienten zu bedürfen glaubten.

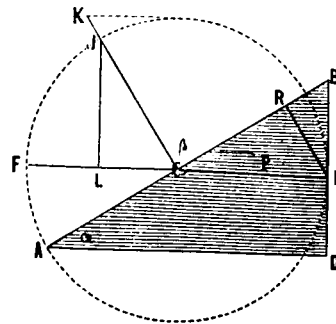
Diese Formeln sind aber falsch, weil die soeben aufgestellte Ableitung nicht zutreffend, oder doch nicht vollständig ist.

Es findet nämlich bei dem in Vergleich gezogenen Stosse einer continuirlichen Reihe fester Körper auf eine schiefe Fläche nicht der nämliche Vorgang statt wie bei einem Luftstrome, welcher in unserem Falle als Theil einer unbegrenzten Luftmasse auf eine schiefe Fläche stösst. Bei den festen Körpern und ebenso auch bei isolirten Flüssigkeitsstrahlen gilt die Voraussetzung, dass die Körper oder die Flüssigkeitstheilchen mit ihrer für die Fläche unwirksamen Kraftcomponente frei ausweichen und ihren Weg in abgeänderter seitlicher Richtung ungehindert fortsetzen können. Unser Luftstrom dagegen kann nicht seitlich in einen leeren Raum entweichen. Er ist vielmehr allseits von anderen Luftmassen eingeschlossen, welche aus dem gleichen Stoffe bestehen und die gleiche Consistenz besitzen, wie er selbst. Diese muss er auseinanderdrängen und zur Seite schieben. Er muss also auch wegen Mangels eines freien Ausweges bei dem Zusammenreffen mit der schiefen Fläche jedenfalls mehr lebendige Kraft abgeben, als eine Reihe in Freiheit befindlicher Körper oder ein isolirter Flüssigkeitsstrahl abgibt. Die oben angegebene Componente $P \cos \alpha$, welche längs der Fläche wirkungslos entweichen sollte, findet in dem ihr entgegenstehenden Luftwiderstande eine Reaktionskraft, welche die oben berechnete wirksame Componente $P \sin \alpha$ mit irgend einem Betrage verstärken muss. Deshalb wird ein Luftstrom, welcher auf eine schiefe Fläche stösst, einen grösseren Kraftantheil als diese einfache Componente $P \sin \alpha$ an dieselbe abgeben, nämlich $P \sin \alpha + x$.

Hier brechen wir den Vergleich des Luftstromes mit festen Körpern und einem isolirten Flüssigkeitsstrahl vorläufig ab und wenden uns einer zweiten Betrachtung zu.

Denken wir uns, dass der von allen Seiten durch andere Luftmassen eingeschlossene Luftstrom bei seinem Zusammentreffen mit einer schiefen Fläche (siehe Fig. 10) als ein Keil ABD wirke, welcher vorwärtsgeschoben, sich mit seiner Seitenfläche AB gegen die schiefe Fläche und mit der anderen Seitenfläche AD gegen die umgebende Luftpöhle lehnt. Wenn die Kraft, mit welcher dieser Keil in der Richtung EC des Luftstromes vorwärts getrieben wird, P ist, so gilt für die von ihm ausgeübte Druckwirkung die bekannte Gleichung

Fig. 10.



$$Q = \frac{P \sin \beta \cos \gamma}{\sin \alpha}, \quad \text{worin } \alpha \text{ der die}$$

Schärfe des Keiles messende Winkel ist, β der Winkel, um welchen die Richtung der Last von der Seitenfläche AB abweicht und γ der Winkel, welchen die Krafterichtung mit der Seitenfläche AD einschliesst.

Nimmt man an, dass die Last in der Richtung KC , also rechtwinkelig gegen die Keilfläche AB gerichtet ist, so muss $\beta = 90^\circ$ und $\gamma = 0$ gesetzt werden, und es ergibt sich für die gesuchte Normal-

wirkung auf die schiefe Fläche $Q = N = \frac{P \times 1 \times 1}{\sin \alpha} = \frac{P}{\sin \alpha}$ oder

$N = P \operatorname{cosec} \alpha$, d. i. CK . Diese Keilwirkung ist also grösser, als die angewendete Kraft $P = CE$, wie dies der bekannten Eigenschaft des Keiles entspricht. Bei der weiteren Annahme, dass die Last in der Richtung FC direct der Krafterichtung EC entgegenwirkt, wird $\beta = \alpha$ und $\gamma = 0$, somit die Parallelwirkung des Keiles

$$Q = K = P \frac{\sin \alpha \times 1}{\sin \alpha} = P,$$

d. i. CF . Die Wirkung wäre also in dieser Richtung gleich der angewendeten Kraft.

Wollte man diese Resultate schon als endgiltig betrachten, so würde man mittelst Substitution von $P = v^2 f \frac{\gamma}{g}$ und $f = F \sin \alpha$ nun-

mehr die Formeln $N = v^2 F \frac{\gamma}{g}$ und $K = v^2 F \sin \alpha \frac{\gamma}{g}$ erhalten.

Aber auch diese Ableitung kann nicht als zutreffend oder vielmehr nicht als abgeschlossen angesehen werden, weil sie an die Voraussetzung geknüpft ist, dass die Consistenz des Keiles für die berechneten gesteigerten Druckleistungen vermöge seiner inneren Structur befähigt sei. Jedes Material, welches mittelst eines Keiles auseinandergedrängt oder gespalten werden soll, fordert, dass der Keil zur Druckleistung und $P \cos \alpha$ und zur Parallelwirkung P eine grössere Consistenz und Widerstandsfähigkeit besitze, als das Material selbst. Wenn unser Keil aus einem hinlänglich festen Stoffe bestünde oder doch mit einem solchen umhüllt wäre und an seiner Rückseite BD mit der Kraft P solchen umhüllt wäre und an seiner Rückseite BD mit der Kraft P solchen berechneten Keilwirkungen in den Richtungen CK und CF wirklich eintreten. Unser Keil aber ist nicht fest, sondern ausdehnungsfähig und von bedingter Nachgiebigkeit. Seine Consistenz kann nicht über ein gegebenes Dichtigkeits-Verhältniss hinaus den Postulaten der Keilwirkung entsprechen.

Wenn schon unser Luftstrom, welcher die Kraft P besitzt, mittels einer rechtwinkligen Stirnseite einen Druck $Q = P$ wirklich hervorzubringen vermag, weil eben unter dieser Bedingung und einzig nur unter dieser Bedingung die Kraft P wirklich vorhanden und die entsprechende Widerstandsfähigkeit oder Consistenz der Luft gegeben ist, so folgt daraus nicht, dass die gleiche Widerstandsfähigkeit auch auf schiefen Keilflächen vorhanden ist. Der Ausdruck P ergibt sich nämlich aus den Factoren $v^2, f, \frac{\gamma}{g}$, wovon das v nur in der

einzigen Richtung EC des Luftstromes seine Gültigkeit hat. Daraus folgt, dass die Widerstands- oder Tragfähigkeit des Luftkeiles auf seiner Seitenfläche AB eine Minderung und Begrenzung seiner Druckwirkung erleiden muss, oder mit anderen Worten, dass letztere kleiner sein muss als $N = \frac{P}{\sin \alpha}$, nämlich $N = \frac{P}{\sin \alpha} - y$.

Wir haben nun als vorläufiges Resultat der beiden auf verschiedenen Wegen angestellten Betrachtungen gefunden, dass die Formeln $N = P \sin \alpha$ und $N = \frac{P}{\sin \alpha}$ jene Extreme bezeichnen, deren erstes einen entschieden zu kleinen Werth und deren zweites einen entschieden zu grossen Werth liefert, so dass der wahre Werth von N entschieden zwischen beiden eingeschlossen sein muss. Es ist bei der jedenfalls zwischen beiden eingeschlossenen Formel der noch zu ersten, aus dem Stoffe fester Körper abgeleiteten Formel der noch zu addirende Werth von $+x$ und bei der zweiten, aus der Keilwirkung abgeleiteten Formel der noch zu subtrahierende Werth von $-y$ näher zu untersuchen.

In letzterer Beziehung (siehe Fig. 10) ist es augenscheinlich, dass die Consistenz und Widerstandsfähigkeit des Luftkeiles, welche nur in einer zur Richtung EC rechtwinkligen Fläche entsprechend der Kraft P sein kann, in jeder anderen kleiner als P sein muss und nur mehr einem Werth $P \sin \alpha$ entsprechen kann, weil in diesem Falle auch der in P enthaltene Factor v^2 nur mehr $v^2 \sin \alpha$ ist. Es ist also die theoretische Leistungsfähigkeit der Seitenflächen eines festen Keiles, welche von der Kraft P angetrieben, bei einem Luftkeil mit dem Factor $\sin \alpha$ zu multipliciren, respective abzuschwächen. Somit verwandelt sich in unserem Falle die für die Keilseite AB berechnete ideale Leistungsfähigkeit in normaler Richtung oder der von ihr ausgeübte Normaldruck CK oder $N = P \operatorname{cosec} \alpha = \frac{P}{\sin \alpha}$ in die wirklich

mögliche Druckfunktion CJ oder $N = \frac{P}{\sin \alpha} \times \sin \alpha = P$.

Der Werth des oberwähnten y ergibt sich dann folgerichtig mit $P \left(\frac{1}{\sin \alpha} - 1 \right)$. Ferners verwandelt sich der berechnete Parallel-

druck CF oder $K = P$ in den Werth CL , d. i. $K = P \sin \alpha$, und hieraus ergibt sich folgerichtig auch der Auftrieb $G = P \operatorname{ctg} \alpha \times \sin \alpha = P \cos \alpha$.

Wenn wir nun wieder zu der ersteren Betrachtung, nämlich zum Vergleiche unseres Luftstromes mit einer stossenden Körperreihe oder einem isolirten Flüssigkeitsstrahle zurückkehren und untersuchen, wie gross der Betrag an lebendiger Kraft sei, welcher der Componente $P \cos \alpha$ bei dem Mangel jeden freien Ausweges schliesslich noch erübrigen könne, so gelangen wir zu der Ansicht, dass nicht bloss ein Theil der lebendigen Kraft $P \sin \alpha$ verloren gehe, sondern der ganze Betrag dieser Kraft absorbiert werde. Wenn ein Luftstrom, welcher auf eine normalgestellte Fläche stösst, seine ganze lebendige Kraft verliert, resp. an das Hinderniss abgibt, indem er mit seinem ganzen kubischen Inhalt nach der Seite auszuweichen und in die umgebende Luftmasse einzudringen oder dieselbe wegzuschieben gezwungen ist, so kommt in Betracht, dass der Luftstrom, welcher auf eine schiefe Fläche stösst, ganz ebenso gezwungen ist, mit seinem gesamten kubischen Inhalt nach der Seite auszuweichen und seine Umgebung wegzudrängen. Wenn auch die einzelnen den Strom bildenden Luftfäden im letzteren Falle vielleicht theilweise mehr schiefe Richtungslinien verfolgen, so sind doch die normal gegen die einschliessende Lufthülle thätigen Componenten dieser schiefen Richtungen als gleichwerthig zu erachten mit den im ersten Falle auftretenden Seitenwirkungen. Es zeigt sich also ein im Wesentlichen ganz gleicher Vorgang bei den schiefgestellten Flächen, wie bei den normalgestellten und hienach ist die Folgerung indicirt, dass bei den schiefgestellten Flächen ebenso die ganze lebendige Kraft des Luftstromes aufgehoben, resp. von der Fläche aufgenommen wird, wie bei normalgestellten. Somit kann die besagte Componente $P \cos \alpha$ weder ganz, noch theilweise frei und ungenützt ausgehen. Sie wird völlig aufgebraucht und liefert als Reaktionskraft einen schliesslich mit der Componente $P \sin \alpha$ parallel wirkenden Zuschuss zu letzterer. Die Vereinigung der ungeschmäleren Kraft-Componente $P \cos \alpha$ mit der Componente $P \sin \alpha$ muss zuletzt zur Resultirenden P , aus welcher beide abgeleitet wurden, wieder zurückführen, oder mit anderen Worten, die ursprünglich gedachte Kraftzerlegung findet gar nicht statt. Hienach gelangt man zu der Annahme, dass ein im unbegrenzten Luftraume auf eine schiefe Fläche treffender Luftstrom seine Kraft ganz und voll an die Fläche abgibt, dass er also die gleiche Wirkung ausübt, als wenn ihm die normale oder die geometrische Projection derselben, nämlich ihr mit dem Sinus des Neigungswinkels multiplicirtes Ausmaass entgegengestellt wäre.

Das in obiger Darlegung gesuchte $+x$ kann also nur die Differenz zwischen CK und CJ , d. i. die Differenz zwischen $P \sin \alpha$ und P sein. Diese Differenz ist $P(1 - \sin \alpha)$ und bildet also jenen Kraftzuschuss, um welche die Kraft einer stossenden Körperreihe oder eines Flüssigkeitsstrahles sich vergrössert, wenn deren freie Thätigkeit durch eine Umschliessung von homogenen Körpern oder Flüssigkeiten gehemmt wird.

Wir fassen nunmehr die Ergebnisse unserer auf zweierlei Wegen angestellten Betrachtungen dahin zusammen, dass die beiden Formeln $N = P \sin \alpha + x$ und $N = \frac{P}{\sin \alpha} - y$ mit Substituierung der gefundenen

Werthe $x = P(1 - \sin \alpha)$ und $y = P \left(\frac{1}{\sin \alpha} - 1 \right)$ zu dem gleichen Resultate $N = P$ führen.

Eine dritte Betrachtung kann angestellt werden, indem man den

wirkenden Luftstrom in seiner Eigenschaft als Flüssigkeit beurtheilt. Wir denken uns den Luftstrom (s. Fig. 11) als ein Prisma $ABDE$ oder P von quadratischem Querschnitte. Die in einer Zeiteinheit zur Wirkung kommende Länge desselben ist FC und seine Dicke AE . Jede dieser Dimensionen wird als Einheit gesetzt, und ebenso sei die dritte Dimension, nämlich die Breite des Prismas, welche rechtwinklig auf

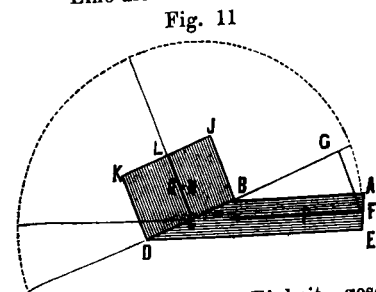


Fig. 11

der Dicke steht, gleich Eins. Dieses Prisma besteht aus Flüssigkeit, nämlich Luft, welche sich in einem bestimmten Dichtigkeitszustande befindet, und wir denken uns das Flüssigkeitsprisma allseits von den Wänden eines Gefässes eingeschlossen. Die vier Seitenwände in den Richtungen AB und ED werden von einer Lufthülle gebildet, welche sich in dem gleichen Dichtigkeitszustande wie das eingeschlossene Prisma befindet. Der Boden des Gefässes bei C wird von der schiefen Fläche BD gebildet. Endlich am anderen beziehungsweise am oberen Ende AE des Prisma ist das Gefäss durch einen zweiten prismatischen Flüssigkeitsstrom verschlossen, welcher in der Längenrichtung FC des Prisma continuirlich nachdrängt und dadurch den in der Längsrichtung wirkenden bestimmten Druck, welchen das eingeschlossene Prisma auf den Boden des Gefässes bei C ausübt, fortdauernd erzeugt und erneuert. Die Bodenfläche bei C empfängt also den Druck des Prisma in gleicher Art, wie der Boden eines mit Wasser gefüllten Gefässes, und es besteht nur der Unterschied, dass die Grösse eines Wasserdrukkes von der Höhe der betreffenden Wassersäule abhängig ist, der Druck unseres Prisma aber einen anderwärts gegebenen bestimmten Werth besitzt. Wenn nun bei einer Wassersäule der Bodendruck gegen eine schiefe Bodenfläche, im Vergleiche mit dem Bodendrucke gegen eine horizontale d. i. normale Bodenfläche, bekanntermaassen jedesmal nach den vom Wasser berührten Flächeneinheiten des Bodens zu bemessen ist, und also auf einer schiefen Bodenfläche, proportional den berührten Flächeneinheiten, ein grösserer Betrag des Druckes sich ergibt, als auf einer normalen Bodenfläche, so muss auch bei unserem Flüssigkeits- d. i. Luftprisma die schiefe Bodenfläche einen, den Flächeneinheiten entsprechenden, grösseren Druck empfangen, als eine normal gestellte empfangen würde. Der Vorgang ist nur in soferne nicht vollständig der nämliche, als bei der Wassersäule der Druck auf den untersten Theil der schiefen Bodenfläche im Vergleiche mit dem Druck auf dem obersten Theile um so viel grösser ausfällt als die bezügliche Differenz der Wassersäulenhöhe bedingt, während bei unserem Flüssigkeits- respective Luftprisma die einmal gegebene Druckgrösse für alle Theile der schiefen Bodenfläche die gleiche bleibt. Nehmen wir aber an, dass die Wassersäule sehr hoch und deshalb die Druckdifferenz für einzelne Theile der schiefen Bodenfläche verhältnissmässig unendlich klein sei, so haben wir bei der Wassersäule den vollständig gleichen Vorgang wie bei unserem Luftprisma. Es empfängt dann in beiden Fällen jede Flächeneinheit des schiefen Bodens den gleichen Druck wie jede Flächeneinheit eines normalgestellten Bodens.

Es ist nun zu ermitteln, wie sich das Quadratmaass unserer schiefgestellten Bodenfläche zum Quadratmaass einer als Einheit geltenden normalen Bodenfläche verhält. Dieses Verhältniss richtet sich, weil die Breite-Dimension des Prisma unverändert = 1 bleibt, nach der linearen Dicke-Dimension des Prisma, d. i. nach der Länge BD im Vergleiche zu AE . Auf dem Wege der Construction ergibt sich sofort, dass dieses Verhältniss, wenn der Schiefstellungswinkel der Bodenfläche mit α bezeichnet wird, $\text{cosec } \alpha : 1$ oder $\frac{1}{\sin \alpha} : 1$ ist.

Wenn also das Druckverhältniss des auf die Bodenfläche wirkenden Prisma, in seinem normalen quadratischen Querschnitte gemessen, = 1 ist, so ergibt sich das hiedurch auf die schiefe Fläche übertragene Druckverhältniss mit $1 \cdot \text{cosec } \alpha$, oder $\frac{1}{\sin \alpha}$.

Bei unserem Luftprisma darf nun aber, wenn es als Ausdruck einer thätigen Kraft gilt, nicht blos sein wirksamer Querschnitt respective seine Basisfläche in Betracht gezogen werden, sondern als weiterer Factor muss auch die Länge des Prisma, nämlich die in einer Zeiteinheit zur Wirkung kommende Länge hinzutreten, gerade so wie bei dem Drucke einer Wassersäule nicht blos die Grösse ihrer Druckfläche, sondern auch ihre Höhe einen nothwendigen Factor bildet.

Wenn die Weglänge FC , welche das Prisma mit seinem Normalquerschnitte in einer Zeiteinheit zurücklegt oder verbraucht, = 1 ist, so kann diese Weglänge in Hinsicht auf die geänderte Querschnitts- oder Basisfläche, welche für die Druckwirkung des Prisma auf die schiefe Fläche maassgebend wird, nicht mehr = 1 sein, sondern verwandelt sich, nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten, durch Construction in die Länge FG oder CL , d. i. $1 \times \sin \alpha$.

Durch Zusammensetzung beider gefundenen Factoren ergibt sich also für die vollständige Druckwirkung unseres Flüssigkeits- oder Luftprisma auf die schiefe Fläche als Resultat $BD \mathcal{F} K$, d. i. $Q = P \cdot \text{cosec } \alpha \cdot \sin \alpha = P$; oder auch, weil Q nichts anderes als der gesuchte Normaldruck N ist, $N = P$.

Wollte man gegen diese Ableitung einwenden, dass der berechnete Druck deshalb nicht vollständig auf die schiefe Bodenfläche übertragen werde, weil der Flüssigkeits-Inhalt des Prisma thatsächlich die idealen Gefässwände durchbrechen und vor der Bodenfläche seitwärts bei B und D abfliessen müsse, so wird dieser Einwand durch den Umstand widerlegt, dass die Gefässwände, welche im Gleichgewichte mit der Spannung des Prisma-Inhaltes stehen, nicht eher dessen Ausfliessen den äusseren zu überwiegen beginnt, und dass daher gleichzeitig mit dem Durchbrechen der Wände, welche hiebei als Regulirungsventile fungiren, die Druckwirkung nur um so gewisser und vollständiger an die Bodenfläche des Gefässes abgegeben werden muss.

Somit führen alle drei Betrachtungen zu den gleichen Formeln, nämlich für den Normaldruck oder Widerstand der Luft auf einer

schiefgestellten Fläche: $N = \frac{1}{2} F \sin \alpha \frac{\gamma}{g}$

für den Paralleldruck: $K = \frac{1}{2} F \sin 2\alpha \frac{\gamma}{g}$ und endlich

für den Auftrieb: $G = \frac{1}{2} F \sin \alpha \cos \alpha \frac{\gamma}{g}$. Hiezu gelten selbstverständlich auch die Gleichungen $N = \sqrt{K^2 + G^2}$, $K = \sqrt{N^2 - G^2}$ und $G = \sqrt{N^2 - K^2}$.

Mag es nun sein, dass die vorstehende Ermittlungsart der Formeln nicht als eine directe und unfehlbare theoretische Ableitung hingestellt werden darf, sondern eine solche erst noch aufzufinden ist, oder dass hier ein Naturgesetz vorliegt, für welches eine streng mathematische Begründung und Herleitung überhaupt nicht erbracht werden kann, immerhin haben die angestellten Betrachtungen dem Vortragenden die Ueberzeugung aufgedrängt, dass die Formeln unmöglich anders construirt sein können, ohne mit der Wahrheit in Widerspruch zu treten, und dass sie deshalb als Grundlage weiterer Untersuchungen acceptirt werden müssen.

Entgegen dieser Anschauung enthalten alle dem Vortragenden bekannten bezüglichen Lehrbücher und Handbücher für den horizontalen Luftwiderstand einer schiefen ebenen Fläche die Formel

$$K = \frac{1}{2} F \sin^3 \alpha \frac{\gamma}{g}$$

und für den verticalen Widerstand oder Auftrieb die Formel

$$G = \frac{1}{2} F \sin^2 \alpha \cos \alpha \frac{\gamma}{g}$$

Das Taschenbuch des Vereines „Hütte“ gibt sogar den Normalwiderstand

$$N = \frac{1}{2} F \sin^3 \alpha \frac{\gamma}{g}$$

an, wonach

$$K = \frac{1}{2} F \sin^4 \alpha \frac{\gamma}{g} \text{ wäre.}$$

Es wird also $\sin \alpha$ stets um eine Potenz und bei der „Hütte“ gar um zwei Potenzen höher eingestellt.

Nun spielen aber bei flugtechnischen Berechnungen sehr spitze Winkel die Hauptrolle, α etwa = 15 bis 50 und hiebei gibt $\sin^2 \alpha$ nur $1/4$ bis $1/12$ des Werthes von $\sin \alpha$, und $\sin^3 \alpha$ gar nur $1/16$ bis $1/144$; so dass zufolge solcher Berechnungen leicht das Mögliche als unmöglich und ebenso das Unmögliche als möglich erscheinen kann.

Die Schwierigkeit der Ableitung einer überzeugenden Theorie für die Druckwirkung von Luftströmen auf schräge Ebenen war es hauptsächlich, welche den Vortragenden veranlasste, den Weg des Experimentes zu betreten, um das Richtige durch Beobachtung von Thatsachen festzustellen.

Der weitaus grösste Theil der Experimente galt der Nachweisung der wahren Formeln für den Luftwiderstand bei schrägen Flächen.

Es gelang, für jede der drei Formeln, nämlich für die Werthe N , K und G die experimentelle Prüfung durchzuführen.

Die Versuche wurden mit dem schon früher beschriebenen Flügelwerk und zwar wiederum mit jedem der drei Apparate verschiedener Grösse vorgenommen und führten durchwegs zu übereinstimmenden Resultaten.

Es seien zunächst einige Beispiele aus den Versuchsreihen für K d. i. den Horizontal-Widerstand herausgehoben.

Bei Versuch Nr. 308 und 309 wurden zwei Flügelflächen von je 500cm^2 , zusammen 1000cm^2 oder 0.1m^2 in Anwendung gebracht. Die Länge der Flugbahn für 1m Gewichtsfall war 61.0m , daher das Hebelverhältniss der Gewichtswirkung $\frac{1}{61.0}$. Der Werth $\frac{1}{g}$ war zu-

folge thermometrischer und barometrischer Beobachtung $= \frac{1}{8.350}$.

Die Flügel wurden, um die nachfolgende Versuchsreihe möglichst anschaulich einzuleiten, vorerst vertical gestellt und

bei Versuch Nr. 308 mit dem effectiven Treibgewichte von $2 \times 300 - 42 = 558\text{g}$ und

bei Versuch Nr. 309 mit dem effectiven Treibgewichte von $2 \times 600 - 85 = 1115\text{g}$ in horizontale Rotation versetzt.

Der auf die Flügel übertragene, durch das Hebelverhältniss zwischen dem Spulenradius und dem Radius des wirksamen Rotationskreises bedingte Gewichtsdruck war daher

$$\text{bei Versuch Nr. 308 } \frac{558}{61} = 9.15\text{g und für } 1\text{m}^2 = 0.0915\text{kg}$$

$$\text{„ „ Nr. 309 } \frac{1115}{61} = 18.28\text{g „ „ } 1\text{m}^2 = 0.1828\text{kg.}$$

Diese für die Gewichtswirkung im Druckmittelpunkte geltenden Zahlengrössen bedeuten zugleich auch die Grösse des Widerstandes, welchen die Luft den mit bestimmter Geschwindigkeit kreisenden Flügeln entgegensetzte, da wie früher schon erläutert wurde, Gewichtsdruck und Luftwiderstand sich das Gleichgewicht halten müssen. Da der Gewichtsdruck gemäss der Construction des Apparates horizontal auf die Flügel wirkt, so bedeutet die Grösse dieser Gewichtswirkung auf die Flügel zugleich die Grösse des horizontalen Luftwiderstandes, also eben zugleich die Grösse K . Direct beobachtet wurde bei diesen Experimenten die Ablaufszeit und hieraus wurde die Geschwindigkeit v berechnet. Wird der für v gefundene Werth in unsere Formel $K = \frac{v^2 F \sin^2 \alpha}{g}$ eingesetzt und ergibt sich dann aus dieser Formel für K der gleiche Werth, wie er direct durch den wirksamen Gewichtsdruck angezeigt wird, so liegt darin der empirische Beweis obiger Formel.

Die beobachtete Durchschnittsdauer für 1m Gewichtsfall war bei Versuch Nr. 308 69.8 Sekunden, daher die Flügelgeschwindigkeit

$$v = \frac{61}{69.8} = 0.874\text{m pro Secunde,}$$

bei Versuch Nr. 309 49.4 Sekunden, daher die Flügelgeschwindigkeit

$$v = \frac{61}{49.4} = 1.237\text{m pro Secunde.}$$

Daraus ergibt sich der Horizontal-Widerstand nach der Formel

$$K = \frac{v^2 F \sin^2 \alpha}{g},$$

weil $F = 1$ und $\alpha = 90^\circ$, somit $\sin \alpha = 1$ ist:

$$K = \frac{v^2}{8.350}, \text{ daher}$$

$$\text{bei Versuch Nr. 308 } K = \frac{0.874^2}{8.350} = 0.0915\text{kg}$$

$$\text{„ „ Nr. 309 } K = \frac{1.237^2}{8.350} = 0.1832\text{kg}$$

Ganz dieselben Resultate würden wir in diesem Falle auch erhalten, wenn in der Formel $\sin \alpha$ in der dritten statt in der zweiten Potenz stünde.

Ebenso würden nach der Formel für den Normaldruck

$$N = \frac{v^2 F \sin \alpha}{g}$$

sich ganz dieselben Zahlen ergeben. Es ist nämlich bei verticaler Flügelstellung $K = N$, d. h. Horizontaldruck und Normaldruck fallen zusammen.

Durch die fast völlige Uebereinstimmung der nach der Formel gefundenen Druckgrössen mit den durch die Gewichtswirkung indicirten wird also hier für die Frage, ob $\sin^2 \alpha$ oder $\sin^3 \alpha$ in die Formel für K gehöre, noch nichts entschieden, wohl aber wieder die früher schon eingehend erörterte Richtigkeit der Formel $P = \frac{v^2 F \gamma}{g}$ bestätigt.

Dagegen muss bei den folgenden Versuchen, wobei die Flügel von 10 zu 10 Grad in immer spitzeren Winkeln eingestellt wurden, um so schärfer der Unterschied zwischen der Formel mit $\sin^2 \alpha$ und der mit $\sin^3 \alpha$ hervortreten, je kleiner der Winkel α wird.

Diesen Unterschied wollen wir an einigen Beispielen aus besagter Versuchsreihe im Folgenden erläutern und dadurch darthun, welche Formel die richtige ist.

Dieselben Flügel wie bei Versuch Nr. 308 und 309 wurden auf den Winkel $\alpha = 70^\circ$ eingestellt, und bei Versuch Nr. 314 mit dem Treibgewichte $2 \times 300 - 42 = 558\text{g}$, bei Versuch Nr. 316 mit dem Treibgewichte $2 \times 600 - 85 = 1115\text{g}$ in horizontale Rotation gesetzt.

Der gemäss dem Hebelverhältnisse auf den Flügeln ruhende Gewichtsdruck und somit auch der widerstehende horizontale Luftdruck betrug daher thatsächlich wie bei den vorherigen Versuchen

$$\text{bei Versuch Nr. 314 pro Quadratmeter } 0.0915\text{kg}$$

$$\text{„ „ Nr. 316 „ „ } 0.1828\text{kg.}$$

Die beobachtete Ablaufsdauer bei 1m Gewichtsfall war durchschnittlich

bei Versuch Nr. 314 65.6 Sekunden, also die Flügelgeschwindigkeit

$$v = \frac{61}{65.6} = 0.930\text{m pro Secunde,}$$

bei Versuch Nr. 316 46.4 Sekunden, also die Flügelgeschwindigkeit

$$v = \frac{61}{46.4} = 1.315\text{m pro Secunde,}$$

wonach sich der horizontale Luftwiderstand K nach der Formel

$$K = \frac{v^2 F \sin^2 \alpha}{g}$$

mit folgenden Werthen ergibt:

$$\text{bei Versuch Nr. 314 } K = \frac{0.930^2 \times 0.93969^2}{8.35} = 0.0915\text{kg}$$

$$\text{„ „ Nr. 316 } K = \frac{1.315^2 \times 0.93969^2}{8.35} = 0.1829\text{kg,}$$

was mit den aus der Gewichtswirkung zu entnehmenden thatsächlichen Postulaten fast vollkommen übereinstimmt.

Würde die Formel statt $\sin^2 \alpha$ den Factor $\sin^3 \alpha$ enthalten, so ergäbe sich

$$\text{bei Versuch Nr. 314 } K = \frac{0.930^2 \times 0.93969^3}{8.35} = 0.0859\text{kg}$$

$$\text{„ „ Nr. 316 } K = \frac{1.315^2 \times 0.93969^3}{8.35} = 0.1718\text{kg,}$$

welche Werthe bedeutend abweichen.

Diesselben Flügel wurden auf den Winkel $\alpha = 50^\circ$ eingestellt und mit den gleichen Treibgewichten wie bei den früheren Versuchen in Bewegung gesetzt, so dass auch jetzt der wirksame Gewichtsdruck beziehungsweise horizontale Luftwiderstand pro 1m^2 Fläche 0.0915kg und bei Versuch Nr. 324 0.1828kg betrug.

Die beobachtete Ablaufsdauer für 1m Gewichtsfall war

bei Versuch Nr. 322 53.5 Sekunden, daher die Fluggeschwindigkeit

$$v = \frac{61}{53.5} = 1.140\text{m pro Secunde,}$$

bei Versuch Nr. 324 37.8 Sekunden, daher die Fluggeschwindigkeit

$$v = \frac{61}{37.8} = 1.614\text{m pro Secunde,}$$

wonach der Horizontaldruck

$$K = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{8.35}$$

folgende Werthe annimmt:

$$\text{bei Versuch Nr. 322 } K = \frac{1.140^2 \times 0.76604^2}{8.35} = 0.0913\text{kg,}$$

$$\text{„ „ Nr. 324 } K = \frac{1.614^2 \times 0.76604^2}{8.35} = 0.1831\text{kg,}$$

also sehr gut übereinstimmend mit den thatsächlichen Postulaten.

Setzt man in die Formel für $K \sin^3 \alpha$ statt $\sin^2 \alpha$, so wäre K bei Versuch Nr. 322 $= 0.0700 \text{ kg}$,
 " " Nr. 324 $= 0.1402 \text{ kg}$,

was viel zu wenig wäre.

Bei Einstellung derselben Flügel auf den Winkel $\alpha = 300$, sowie Beibehaltung derselben Treibgewichte und daher auch derselben Gewichtswirkungen oder horizontalen Luftwiderstände war die beobachtete Durchschnittsdauer des Ablaufens für 1^m Gewichtsfall

bei Versuch Nr. 330 34.6 Sekunden, daher $v = \frac{61}{34.6} = 1.763 \text{ m pro Sec.}$,

" " Nr. 332 24.5 " " $v = \frac{61}{24.5} = 2.490 \text{ m pro Sec.}$,

wonach sich ergibt

bei Versuch Nr. 330 $K = \frac{1.763^2 \times 0.50^2}{8.35} = 0.0931 \text{ kg}$,

" " Nr. 332 $K = \frac{2.490^2 \times 0.50^2}{8.35} = 0.1856 \text{ kg}$.

Mit $\sin^3 \alpha$ statt $\sin^2 \alpha$ würde die Formel ergeben:

bei Versuch Nr. 330 $K = 0.0464 \text{ kg}$,

" " Nr. 332 $K = 0.0928 \text{ kg}$,

also beiläufig nur die Hälfte des factischen dem wirksamen Gewichtsdrucke gleichen Luftwiderstandes.

Endlich wurden bei Versuch Nr. 333 die Flügel auf den Winkel $\alpha = 100$ eingestellt und mit dem Treibgewichte von $2 \times 300 - 42 = 558 \text{ g}$ in Rotation gesetzt. Der im Druckmittelpunkte wirkende Gewichtsdruck und damit auch der horizontale Luftwiderstand war daher, wie früher pro Quadratmeter $= 0.0915 \text{ kg}$.

Die beobachtete Durchschnittsdauer für 1^m Gewichtsfall betrug 12.2 Sekunden, daher $v = \frac{61}{12.2} = 5.000 \text{ m pro Secunde}$.

Demnach $K = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{8.35} = \frac{5^2 \times 0.17365^2}{8.35} = 0.0903 \text{ kg}$.

Mit $\sin^3 \alpha$ statt $\sin^2 \alpha$ würde $K = 0.0157 \text{ kg}$ also nur $\frac{1}{6}$ des thatsächlichen Postulates sein.

Zufolge vorstehender Experimente ist die Uebereinstimmung der Formel $K = \frac{v^2 F \sin^2 \alpha}{g}$ mit dem thatsächlichen Luftwiderstande als eine vollständig erwiesene zu betrachten.

Um das Verhältniss des Luftwiderstandes auf eine normal bewegte zu dem Widerstande auf eine schräge Fläche besonders anschaulich zu machen, wurde noch eine zweite Versuchsreihe durchgeführt, wobei die gleichen Flügelflächen, wie sie zu den vorstehenden Versuchen dienten, von Versuch zu Versuch derart in ihrer Höhen-Dimension geschmälert wurden, dass sie die Grösse $F \sin \alpha$ erhielten, und dass sie, vertical eingestellt, gleichsam einen materiellen Sinus einer unter dem Winkel α geneigten Original-Flügelfläche darstellten, und also eine genau ebenso grosse Luftsäule zu verdrängen hatten, wie früher die ungeschmälerten Flügel mit der Fläche F unter dem Winkel α . Hierbei also musste sich vollkommen präcise herausstellen, um wie viel weniger Widerstand eine geneigte Fläche F als eine vertical stehende kleinere Fläche f vom Inhalte $F \sin \alpha$ zu erleiden hat. Der Widerstand auf die normal bewegte Fläche f ist

$$P = \frac{v^2 f \gamma}{g} = \frac{v^2 F \sin \alpha \gamma}{g}$$

weil eben f gleich $F \sin \alpha$ gemacht wurde. Der Widerstand auf die geneigte Fläche F ist

$$K = \frac{v^2 F \sin^2 \alpha \gamma}{g}$$

Lässt man das Flügelwerk mit den geneigten Flügeln ablaufen und dann ebenso mit den auf die Grösse $F \sin \alpha$ zugeschnittenen vertical stehenden Flügeln, so muss sich, wenn ein Unterschied im Luftwiderstande stattfindet, derselbe darin bekunden, dass (jedesmal die gleichen Treibgewichte vorausgesetzt) die Flügel, welche weniger Widerstand finden, schneller umlaufen als die anderen. Die Flügel müssen eben jedesmal so schnell umlaufen, dass der sie treibende Gewichtsdruck in's Gleichgewicht kommt mit dem hemmenden Luftwiderstande. Das heisst also, in Wirklichkeit ist bei den in Rede stehenden Versuchen der horizontale Druck auf die Flügel jedesmal derselbe, nämlich der aus einer gleichen Gewichtswirkung resultirende;

aber in der verschiedenen Ablaufszeit muss sich die mehr oder minder grosse Hemmung der Flügelrotation äussern. Nach dem Gesagten ist also $K = P$ und demnach $\frac{v^2 F \sin^2 \alpha \gamma}{g} = \frac{v_1^2 F \sin \alpha \gamma}{g}$,
 und hieraus ergibt sich das Verhältniss der Geschwindigkeiten

$$v^2 : v_1^2 = 1 : \sin \alpha$$

sowie das Verhältniss der Ablaufzeiten

$$t_1^2 : t^2 = 1 : \sin \alpha,$$

d. h. die Quadrate der Ablaufzeiten verhalten sich wie 1 zum Sinus des betreffenden Neigungswinkels.

Würde in die Formel für K der Factor $\sin^3 \alpha$ statt $\sin^2 \alpha$ gehören, so würde sich obiges Verhältniss der Ablaufzeiten so gestalten:

$$t_1^2 : t^2 = 1 : \sin^2 \alpha.$$

Wir heben nun einige der in dieser Richtung angestellten vergleichenden Versuche und deren Ergebnisse heraus:

Es wurden die beiden Flügelflächen, welche je 25^{cm} lang und 20^{cm} hoch waren und den Inhalt $F = 1000 \text{ cm}^2$ zusammen besaßen, auf die Höhe von 18.79^{cm} geschmälert, wonach sie die Grösse $F \sin 700$ repräsentirten und also auf die gleiche Luftmenge drückten, wie die ungeschmälerten Flügel, als sie unter 700 Neigungswinkel eingestellt waren.

Zur Rotation dieser Sinusflügel wurden wieder die früheren Treibgewichte angewendet, nämlich

bei Versuch Nr. 315 $2 \times 300 - 42 = 558 \text{ g}$

" " Nr. 317 $2 \times 600 - 85 = 1115 \text{ g}$

Hiernach betrug der auf den Sinusflügeln ruhende wirksame Gewichtsdruck und also auch der Luftwiderstand

bei Versuch Nr. 315 9.15^g

" " Nr. 317 18.28^g

d. i. ebensoviel wie bei der früheren Versuchsreihe.

Die beobachtete durchschnittliche Ablaufzeit für 1^m Gewichtsfall war

bei Versuch Nr. 315 67.9 Sekunden,

" " Nr. 317 48.0 "

Bei den mit diesen Versuchen in Vergleich zu ziehenden Versuchen Nr. 314 und 316, welche wir in der früheren Reihe aufführten, betrug die durchschnittliche Ablaufzeit für 1^m Gewichtsfall

bei Versuch Nr. 314 65.6 Sekunden,

" " Nr. 316 46.4 "

Diese Ablaufzeiten müssen sich zu den obigen, soll unsere Formel richtig sein, wie $\sqrt{\sin 700} : 1$ verhalten, also müssen die beiden ersten Ablaufzeiten 67.9 und 48.0 mit $\sqrt{\sin 700}$ d. i. mit 0.969 multiplicirt die beiden letzten Ablaufzeiten 65.6 und 46.4 geben.

Es ist

$$67.9 \times 0.969 = 65.8$$

$$48.0 \times 0.969 = 46.5$$

und wir sehen also ein sehr genaues Zutreffen des behaupteten Verhältnisses und damit die Bestätigung der Richtigkeit unserer Formel für K . Würde in diese Formel $\sin^3 \alpha$ als Factor gehören, so müssten die grösseren Ablaufzeiten mit $\sin \alpha$ also hier mit 0.9397 multiplicirt die kleineren Ablaufzeiten als Product ergeben.

Da aber

$$67.9 \times 0.9397 = 63.8$$

$$\text{und } 48.0 \times 0.9397 = 45.5 \text{ ist,}$$

so erhellt alsbald, dass das Verhältniss $\sin \alpha : 1$ und somit auch die Formel $\frac{v^2 F \sin^3 \alpha \gamma}{g}$ der Wahrheit nicht entspricht.

Es wurden weiters auch Sinusflügel für den Winkel $\alpha = 500$ hergestellt; diese Flügel hatten die Höhe von 15.32^{cm} und entsprachen also dem materiellen Sinus der im Winkel von 500 geneigten Original-Flügelfläche von 1000^{cm}.

Die Treibgewichte waren dieselben wie früher, nämlich

bei Versuch Nr. 323 $2 \times 300 - 42 = 558 \text{ g}$.

bei Versuch Nr. 325 $2 \times 600 - 85 = 1115 \text{ g}$,

Es blieb also auch der wirksame Gewichtsdruck und der thatsächliche Luftdruck derselbe wie früher.

Die beobachtete Durchschnittsdauer für 1^m Gewichtsfall war

bei Versuch Nr. 323 61.3 Sekunden,

" " Nr. 325 43.3 "

Bei den mit diesen Versuchen in Vergleich zu ziehenden Versuchen Nr. 322 und 324, bei denen die ungeschmälerten Flügelflächen, im Winkel von 50° geneigt, mit denselben Treibgewichten rotirten, betrug die durchschnittliche Ablaufszeit für 1^m Gewichtsfall bei Versuch Nr. 322 53.5 Sekunden

Nr. 324 37.8 "

Prüfen wir wieder, wie im Vorangehenden, das Verhältniss letzterer Ablaufzeiten mit ersteren durch Multiplication dieser mit $\sqrt{\sin \alpha}$ also hier mit $\sqrt{\sin 50^\circ} = 0.875$, so erhalten wir

$$61.3 \times 0.875 = 53.6$$

$$43.3 \times 0.875 = 37.9$$

und hierin bestätigt sich wieder mit überraschender Sicherheit das behauptete Verhältniss von $\sqrt{\sin \alpha} : 1$, während an ein Verhältniss wie $\sin \alpha : 1$ und also an eine Formel für K mit $\sin^3 \alpha$ als Factor gar nicht mehr zu denken ist.

Je kleiner der bei den Versuchen angewendete Winkel α wird, um so mehr weicht natürlich die Formel mit $\sin^3 \alpha$ von der Wahrheit ab, während die Formel mit $\sin^2 \alpha$ durch alle Winkel hindurch fortwährend genau zutrifft.

Die für den Winkel $\alpha = 30^\circ$ hergestellten Sinusflügel waren 10.00cm hoch und wurden mit denselben Treibgewichten wie früher umgetrieben.

Die beobachtete Zeitdauer betrug
bei Versuch Nr. 331 49.2 Sekunden

Nr. 333 34.8 "

Hiermit kommen in Vergleich die Versuche Nr. 330 und 332. Für diese war die beobachtete Zeitdauer

bei Versuch Nr. 330 34.6 Sekunden

Nr. 332 24.5 Sekunden.

Prüfen wir wieder wie früher das Verhältniss dieser Zeiten zu obigen und wir erhalten durch Multiplication dieser mit $\sqrt{\sin 30^\circ} = 0.707$

$$49.2 \times 0.707 = 34.8$$

$$34.8 \times 0.707 = 24.6$$

also wieder einen Beweis für das völlige Zutreffen des behaupteten Verhältnisses von $\sqrt{\sin \alpha} : 1$.

Endlich wurden noch Sinusflügel für $\alpha = 10^\circ$ hergestellt.

Diese hatten eine Höhe von 3.47cm und wurden wie bei Versuch Nr. 338 die im Winkel $\alpha = 10^\circ$ geneigten ungeschmälerten Flügel mit den Treibgewichten von $2 \times 300 - 42 = 558g$ in Rotation gesetzt. Die beobachtete Ablaufsdauer bei diesem Versuch (Nr. 339) betrug für 1^m Gewichtsfall 29.0 Sekunden.

Die Zeitdauer bei Versuch Nr. 338 aus der früher aufgeführten Versuchsreihe mit ungeschmälerten schrägen Flügeln betrug für 1^m Gewichtsfall 12.2 Sekunden.

Das Verhältniss dieser Ablaufsdauer mit obiger wird ersichtlich, wenn wir wieder die grössere mit $\sqrt{\sin \alpha}$ d. i. hier $\sqrt{\sin 10^\circ} = 0.4167$ multipliciren:

$$29.0 \times 0.4167 = 12.1$$

Wiederum trifft das aus der Formel $K = \frac{v^2 F \sin^2 \alpha \gamma}{g}$ gefolgerte Verhältniss der Ablaufzeiten

$$t_1^2 : t_2^2 = 1 : \sin \alpha$$

$$\text{oder } t_1 : t_2 = 1 : \sqrt{\sin \alpha}$$

vollkommen zu und erbringt abermals, auch unter dem extremen Verhältniss eines so kleinen Winkels, den schlagenden Beweis für die Richtigkeit obiger Formel.

Gehörte $\sin^3 \alpha$ statt $\sin^2 \alpha$ in die Formel für K , so müssten sich die Ablaufzeiten wie $\sin \alpha : 1$ verhalten und es müsste, wenn die Ablaufzeit der Sinusflügel 29.0 Sekunden beträgt, diejenige der unter 10° geneigten ungeschmälerten Flügel $29 \sin 10^\circ$ d. i. $29.0 \times 0.1736 = 5.0$ Sekunden betragen, was mit dem thatsächlichen Ergebnisse unseres Versuches auch im Entferntesten nicht übereinstimmt.

Die Uebereinstimmung zwischen allen vorstehenden Versuchs- und Rechnungsergebnissen ist eine so augenfällige, ja erstaunliche, dass die Formel

$$K = \frac{v^2 F \sin \alpha \gamma}{g}$$

unmöglich einen analytischen Fehler enthalten kann.

Jede wie immer geartete Aenderung an dieser Formel würde von den thatsächlichen Ergebnissen der Versuche mehr oder minder weit abführen. —

Wir gehen nun zu der empirischen Erläuterung des Vertical-Luftdruckes oder Widerstandes über, also zu jener Wirkung des Luftdruckes auf schräge Flächen, welche wir als Auftrieb bezeichnen und wofür wir bereits theoretisch die Formel

$$G = \frac{v^2 F \sin \alpha \cos \alpha \gamma}{g}$$

ableiteten.

Die experimentelle Untersuchung des Auftriebes ist die den Flugtechnikern wohl am meisten interessirende Seite unseres Themas. Denn der Auftrieb ist es ja, welcher den mechanischen Flug mittels schräger Flächen ermöglichen soll, und die Grösse des Auftriebes ist es, welche uns die so wichtige Grenze des zulässigen Apparat-Gewichtes absteckt.

Es war darum auch dem Vortragenden besonders darum zu thun, in diese wichtige Materie, in der sich viele wissenschaftliche Streitfragen begegnen, durch Experimente Licht zu bringen; und die grosse Mehrzahl aller vorgenommenen Versuche war den Auftriebsbestimmungen gewidmet.

Die diesbezüglichen Experimente wurden mit denselben Versuchsapparaten vorgenommen, mit welchen alle bisher erwähnten Versuche ausgeführt worden waren. Es muss jedoch hier auf einen Bestandtheil dieser Apparate besonders aufmerksam gemacht werden, der bei den bisherigen Versuchen noch keine Anwendung fand. Es ist dies die Waage, auf deren einem Balkenende die rotirende Axe des Flügelwerkes mit ihrer unteren Spitze aufruht.

Vermöge dieser Construction kann das Gewicht aller rotirenden Theile sowohl während der Rotation als auch im Zustande der Ruhe jederzeit genau abgewogen werden.

Vor Allem wurde bei diesen Versuchen für jede Flügelgrösse und bei allen sonstigen hier Einfluss habenden Apparat-Aenderungen stets genau das Eigengewicht aller drehbaren Theile während der Ruhe genau ermittelt. Dann liess man das Flügelwerk mit bestimmten Treibgewichten, bestimmten Neigungswinkel u. s. w. ablaufen, und hiebei wurde während der Rotation wiederum eine Wägung vorgenommen, um die dabei eintretende Verringerung des Gewichtes zu constatiren. Diese Gewichtsverringering aber bedeutet den Auftrieb.

Es wurden also z. B. bei Versuch Nr. 358, welcher mit dem grössten der drei Apparate angestellt wurde, zwei Flügel von je einem Quadratmeter verwendet. Dieselben wurden in den Neigungswinkel $\alpha = 18^\circ$ eingestellt. Als Gewicht der rotirenden Theile wurde bei Ruhe des Apparates 4.800kg ermittelt.

Als Treibgewichte wurden $2 \times 5.000 - 0.700 = 9.300kg$ verwendet.

Durch Wägung während der Rotation wurde als Gewicht der rotirenden Theile 4.460kg gemessen. Sonach ergibt sich als Differenz zwischen dem Gewichte im Ruhezustande und dem Gewichte während der Rotation 0.340kg; d. h. durch die Rotation wurde in Folge des Auftriebes der Waagbalken um 0.340kg erleichtert und dieser Betrag von 0.340kg repräsentirt also die durch das Experiment thatsächlich constatirte Grösse des Auftriebes. Auf den Quadratmeter reducirt beträgt hier also der Auftrieb 0.170kg.

Die durchschnittliche Ablaufsdauer für 1^m Gewichtsfall betrug 40 Sekunden, woraus sich eine Flügelgeschwindigkeit $v = 2.166^m$ ergibt da die gesammte Flugbahnlänge 86.62m ausmachte.

Nach unserer Formel

$$G = \frac{v^2 F \sin \alpha \cos \alpha \gamma}{g}$$

würden wir also nach Einsetzung der bezüglichen Werthe erhalten

$$G = \frac{2.166^2 \times 0.309 \times 0.951}{8.113} = 0.1699$$

was auf das vollkommenste mit dem durch das Experiment ausgewiesenen Betrage übereinstimmt. Würde in obiger Formel der Werth $\sin \alpha$ durch $\sin^2 \alpha$ ersetzt, so könnte natürlich von einer solchen Uebereinstimmung keine Rede mehr sein, da hiedurch der theoretische Werth für G nur mehr 0.1699 $\sin 18^\circ$ d. i. $0.1699 \times 0.309 = 0.0525$ wäre.

Die umfangreichen Versuchsreihen zur Prüfung des Auftriebsvermögens G sind in einer Tabelle, systematisch geordnet, zusammen-

gestellt worden. Wer die in derselben gesammelten Daten eingehend prüft, wird gewiss der Ansicht beistimmen, dass nur die Formel

$$G = \frac{v^2 F \sin \alpha \cos \alpha \gamma}{g}$$

dem empirisch gefundenen thatsächlichen Werthe des Auftriebes entspricht.

Nachdem wir nun den Vorgang bei der experimentellen Prüfung der Formeln für K und G , Horizontaldruck und Auftrieb, genügend erörtert haben, soll noch eines besonderen Experimentes gedacht werden, welches den Zweck hatte, die Formel für N , d. i. für den rechtwinkelig auf die schräge Fläche wirkenden Normaldruck, direct zu erproben.

Eine indirecte Probe dieses Werthes N liegt ja bereits in der empirischen Bestätigung der beiden Formeln

$$K = \frac{v^2 F \sin^2 \alpha \gamma}{g}$$

$$\text{und } G = \frac{v^2 F \sin \alpha \cos \alpha \gamma}{g}$$

welche gemäss der geometrischen Lage dieser Componenten zu ihrer Resultirenden d. i. dem Normaldrucke N , als einzig mögliche richtige Formel für diesen Normaldruck

$$N = \frac{v^2 F \sin \alpha \gamma}{g}$$

ergeben.

Dennoch war dem Vortragenden daran gelegen, auch für die Grösse N eine directe empirische Beweisführung ausfindig zu machen. Diese wurde folgendermaassen durchgeführt:

Es wurde (s. Fig. 12) ein Rahmen aus schmalen Holzleisten hergestellt und um eine in seiner Mitte und zwar in derselben Ebene liegende Achse drehbar gemacht. Diese Achse wurde an einen der Arme des grossen Rotations-Apparates als dessen Verlängerung befestigt, so dass der Rahmen in grossen Kreisen durch die in Bewegung gesetzten Arme herumgeführt werden und dabei jede beliebige Winkelstellung gegen den Horizont einnehmen konnte. In den besagten Rahmen von 1m Länge und 25cm Breite wurden zunächst den beiden Enden kleine Flügelflächen von je 500cm² Inhalt eingesetzt und zwar so, dass ihre Mittellinien von der Drehungsachse des Rahmens gleich weit entfernt waren. Die eine der beiden rechteckigen Flügelflächen wurde genau in die Ebene des Rahmens gelegt, die andere dagegen konnte um eine in ihrer Mittellinie laufende und zur Rahmenachse parallele Drehungsachse gedreht und in jedem beliebigen Winkel gegen die Rahmenebene fixirt werden.

Wurde nun der Rahmen, welcher in seiner Drehungsachse frei beweglich war, vermittels Umdrehung des langen Armes, an dem er befestigt war, rasch fortbewegt und hiedurch also ein Luftdruck auf die beiden im Rahmen eingesetzten Flügelflächen von gleicher Grösse hervorgerufen, so stellte sich alsbald der Rahmen in einen solchen Winkel gegen den Horizont ein, dass die nicht in der Rahmenebene liegende Fläche f_1 vertical zu stehen kam, also vollkommen normal gegen die Luft getrieben wurde.

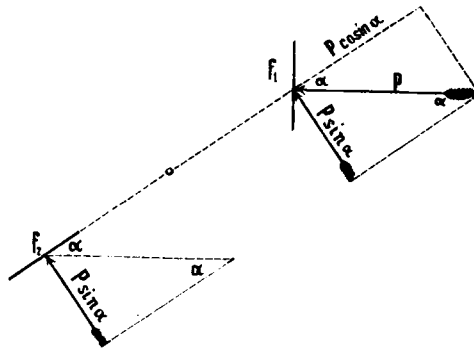
Und in dieser Erscheinung liegt der Beweis der Richtigkeit der Formel $N = \frac{v^2 F \sin \alpha \gamma}{g}$.

Es ist offenbar, dass in der von dem Rahmen eingenommenen und dann unverändert beibehaltenen Stellung sich der Gleichgewichtszustand zwischen dem Luftdrucke auf f_1 und dem auf f_2 kundgibt. Es herrscht demnach an dieser Druckwaage dann Gleichgewicht, wenn die Fläche f_1 vertical steht und die Fläche f_2 einen Winkel gegen den Horizont einschliesst, welcher gleich ist dem Winkel, welchen f_1 mit der Rahmenebene einschliesst. In jeder anderen Stellung des Rahmens aber würde der Druck einer der beiden Flächen überwiegen, hiedurch eine Drehung des Rahmens im Sinne der überwiegenden Fläche ein-

treten und jedesmal wieder der Rahmen in jenen Gleichgewichtszustand mit verticaler Fläche f_1 zurückgeführt werden.

Es ist nun der Druck auf die Fläche f_1 , wenn sie vertical steht $P = \frac{v^2 F \gamma}{g}$. Von diesem Drucke wirkt jedoch nicht der gesammte Betrag auf die Umdrehung des Rahmens d. h. rechtwinkelig zum Balken unserer Luftdruckwaage; vielmehr ist der Betrag des Druckes, welcher den Waagebalken zu drehen sucht, natürlich nur gleich der rechtwinkelig zum Waagebalken wirkenden Componente desselben. Diese Componente aber ist, wie aus nebenstehender Fig. 13 leicht

Fig. 13.



ersichtlich, $= P \sin \alpha$; während die andere Componente $P \cos \alpha$ in der Richtung des Rahmens wirkt und sich in einem Druck auf die Rahmenachse äussert, für die Wirkung an der Waage aber verloren geht. Wie wir sehen, sucht also der Druck auf f_1 den Rahmen mit der Kraft von $P \sin \alpha$ umzudrehen. Da aber am Rahmen in der besagten

Stellung Gleichgewicht herrscht, so haben wir hierin den empirischen Beweis, dass auch auf Seite der Fläche f_2 der Luftdruck mit gleicher Kraft, also wieder mit $P \sin \alpha$ auf die Umdrehung nach entgegengesetzter Seite wirkt, und damit den Beweis, dass der senkrecht zur Fläche f_2 wirkende Luftdruck, d. h. dass der Normaldruck auf f_2 ebenso gross ist, wie die jenseits wirkende Componente, nämlich $= P \sin \alpha$, dass also der Normaldruck $N = \frac{v^2 F \gamma}{g} \sin \alpha$ ist.

Somit haben wir für jede der drei Grössen N , K und G experimentelle Nachweise geliefert und wollen nunmehr, um die verschiedenen Relationen und Wirkungseffekte dieser Grössen nebeneinander darzulegen, beispielsweise die bei einem Papierdrachen eintretenden Erscheinungen an der Hand unserer Formeln verfolgen.

Gesetzt, es sei der Winkel, welchen die Drachenfläche mit der Luftströmung einschliesst $\alpha = 30^\circ$, so wird die schräg gespannte Schnur, welche sich, angenommen, dass der Drache gewichtslos sei, zur Drachenfläche rechtwinkelig einstellt, unter dem Winkel $\beta = 60^\circ$ den gesammten Normaldruck des Windes auf die Drachenfläche $N = \frac{v^2 F \sin \alpha \gamma}{g} = \frac{v^2 \cdot 0.5 F \gamma}{g}$ aufzunehmen haben.

Würde man denselben Drachen mittels zweier Schnüre festhalten so dass die eine in horizontaler Richtung und die andere in verticaler Richtung gespannt wäre, so hätte die horizontale Schnur der horizontalen Druck-Componente

$$K = \frac{v^2 F \sin^2 \alpha \gamma}{g} = \frac{v^2 \cdot 0.25 F \gamma}{g}$$

und die verticale Schnur der Auftriebs-Componente

$$G = \frac{v^2 F \sin \alpha \cos \alpha \gamma}{g} = \frac{v^2 F \sin^2 \alpha \gamma}{g} = \frac{v^2 \cdot 0.433 F \gamma}{g}$$

Widerstand zu leisten.

Nimmt man die Fläche F_1 mit 10m², die auf den Drachen wirkende Luftgeschwindigkeit $v = 5$ m und die Function $\frac{\gamma}{g} = \frac{1}{8}$ an, so ergibt sich für den Druck, resp. für den Zug, welchen die in normaler Richtung zur Drachenfläche schräg gespannte Schnur auszuhalten hat, $N = 1.563$ kg; oder für die Spannung der horizontalen Schnur $K = 0.781$ kg und für die Spannung der verticalen Schnur $G = 1.354$ kg.

Dies Alles gilt jedoch nur für einen Drachen, welcher vollkommen gewichtslos gedacht wird.

Zieht man das in Wirklichkeit vorhandene Eigengewicht in Betracht, so ist es natürlich, dass dieses Gewicht als direct dem Auf-

triebe entgegenwirkend von demselben abgezogen werden muss. Hieraus folgt, dass in dem Falle, als das Eigengewicht ebenso gross als der Auftrieb wäre, die Fläche von der Luftströmung nicht gehoben, sondern nur in der Schwebe gehalten werden kann, und dass in dem Falle, als das Eigengewicht grösser als der Auftrieb ist, sowohl Schweben als wirklicher Auftrieb unmöglich wird.

Aus dem Eigengewichte der Fläche ergibt sich aber auch die Folge, dass die Verminderung der Auftriebs-Componente G , welche während des unveränderten Fortbestehens der Horizontal-Componente K stattfindet, die Verschiebung der Resultirenden aus der normalen Richtung bewirkt und dass daher die Schnur nicht mehr in der Richtung der Normalen, sondern eben in der Richtung der neuen Resultirenden gespannt wird und dass diese Spannung auch nicht mehr die Grösse N sondern weniger, nämlich R beträgt.

Wenden wir dies auf unser obiges Beispiel an, wobei der Horizontaldruck $K = 0.781$, der Auftrieb des gewichtslosen Drachen $G = 1.354$ und der Normaldruck $N = 1.563 \text{ kg}$ war, so müssen wir von G das betreffende Eigengewicht abziehen und aus dem bleibenden Rest mit dem unveränderten K eine neue Resultirende bilden, welche nicht mehr N sondern R sein wird. z. B.

I. Die unter 30° geneigte Drachenfläche habe ein Eigengewicht $g = 0.5 \text{ G}$; danach reducirt sich der Werth der Auftriebs-Componente von 1.354 auf 0.674 kg während K unverändert $= 0.781$ bleibt.

Hieraus berechnet sich die Resultirende

$$R_1 = \sqrt{(0.5 G)^2 + K^2} = 1.034 \text{ kg}$$

Der Neigungswinkel, in welchem die Resultirende liegt, bestimmt sich aus der Gleichung

$$\sin \beta_1 = \frac{0.5 G}{R_1} = 0.655,$$

wonach $\beta_1 = 49^\circ$ ist.

Es wird also die Schnur unter dem Winkel von 49° mit 1.034 kg gespannt sein.

II. Oder wir setzen das Gewicht der Drachenfläche $g = 0.7 \text{ G}$ $= 0.948 \text{ kg}$. Dann bliebe als Auftriebsrest $0.3 \text{ G} = 0.406 \text{ kg}$, während sich $K = 0.781$ wieder nicht ändert. Hienach wird die Resultirende

$$R_2 = \sqrt{(0.3 G)^2 + K^2} = 0.880 \text{ kg}.$$

Dann, aus $\sin \beta_2 = \frac{0.3 G}{R_2} = 0.461$, der Winkel $\beta_2 = 27^\circ 30'$.

Die Schnur würde also im Winkel von $27^\circ 30'$ liegen und mit 0.880 kg gespannt sein.

III. Oder wir setzen das Gewicht der Drachenfläche $g = 0.9 \text{ G}$ $= 1.219 \text{ kg}$. Hiedurch wird der Auftriebsrest $0.1 \text{ G} = 0.135 \text{ kg}$.

K bleibt unverändert.

Die Resultirende wird

$$R_3 = \sqrt{(0.1 G)^2 + K^2} = 0.793 \text{ kg}.$$

Dann, aus $\sin \beta_3 = \frac{0.1 G}{R_3} = 0.017$, $\beta_3 = 10^\circ$.

IV. Setzen wir endlich das Eigengewicht der Drachenfläche $g = G$, so wird die Auftriebs-Componente $= G - g = 0$, während $K = 0.781 \text{ kg}$ verbleibt.

Die Resultirende wird dann $R_4 = \sqrt{K^2} = K$ und $\beta_4 = 0^\circ$.

In diesem Beispiele sind also die für den Schwebezustand ohne Auftrieb eintretenden Relationen veranschaulicht.

Die Resultirende fällt dabei mit K in Grösse und Richtung zusammen, wird also ebenso wie K auch $= \frac{v^2 F \sin^2 \alpha \gamma}{g}$.

Aus dem Gesagten ergibt sich der Lehrsatz, dass eine Drachenfläche bei gleich bleibenden sonstigen Umständen umso weniger Spannung in der sie haltenden Schnur hervorbringt, je grösser das Eigengewicht der Fläche ist. Das Maximum der Spannung würde eintreten, wenn die Fläche vollständig gewichtslos wäre; das Minimum findet statt, wenn das Flächen-Eigengewicht g gleich der Auftriebs-Componente G wird oder $K = N \sin \alpha$.

Alle bisher besprochenen Formeln enthalten immer nur die Grössen des Luftdruckes. Um nun aber diesen Druck dauernd zu überwinden, einen Körper gegen diesen Druck dauernd vorwärts zu treiben, muss bekanntlich eine mechanische Arbeit geleistet

werden, welche gleich ist dem Producte aus dem wirkenden Drucke und dem zurückgelegten Wege. Die Arbeit per Secunde ist also gleich dem Producte aus dem stetigen Drucke mit dem per Secunde zurückgelegten Wege, d. h. mit der Geschwindigkeit. Für den horizontalen Antrieb einer schiefen Fläche in der Luft ist daher bei Einhaltung des metrischen Maass- und Gewichts-Systems die erforderliche Arbeits- oder Betriebskraft

$$A = v \cdot K = \frac{v^3 F \sin^2 \alpha \gamma}{g} \text{ Meter-Kilogramm per Secunde.}$$

Der während der Bewegung stattfindende Auftrieb oder das Gewicht, welches von der schiefen Fläche gehoben werden kann, bleibt dagegen natürlich unverändert

$$G = \frac{v^2 F \sin \alpha \cos \alpha \gamma}{g}$$

Auch die Betriebskraft A ist in der schon erwähnten Tabelle für jeden einzelnen Versuch aufgeführt worden und es fand somit auch die Formel für A in diesen Versuchen ihre experimentelle Prüfung und Bestätigung.

Wenn fast continuirlich kleine Differenzen zwischen den Resultaten der aufgestellten Formeln und denen der angestellten Versuche sich ergaben, so können diese Differenzen, welche nur in wenigen extremen Fällen bis 10 und 11% reichen, doch keineswegs als ein Argument gegen die Richtigkeit der Formeln betrachtet werden. Die Fehlerquellen, welche in den angewandten verschiedenen Versuchs-Apparaten und Manipulationen trotz ihrer sorgfältigsten Ausführung sich verbargen, belaufen sich auf eine nicht unbedeutende Zahl, aus welcher die wichtigsten nachfolgend hervorgehoben werden.

Es handelte sich zuerst um die mathematisch genaue Dimensionierung der einzelnen Flügelformate, sowie des Abstandes ihrer Innen- und Aussenränder von der Drehungsachse. Die kleinsten unbemerkbaren Ungenauigkeiten mussten zu constanten Beirungen der Versuchs-Resultate führen.

Sodann kommen die Treibgewichte in Betracht. Diese konnten zwar an und für sich sehr genau abgewogen und adjustirt sein, es war jedoch nicht möglich, jenen Gewichtsverlust, welcher in der Reibung der Gewichtsrollen und Wellenzapfen, sowie in der Biegung der Zugdrähte oder Schnüre und Fäden entstand, genauer als in einer beiläufigen Percentangabe zu bestimmen. Dabei blieb es stets zweifelhaft, ob die vor den jeweiligen Experimenten ermittelten Gewichtsverluste auch während der Flügel-Rotationen und der dabei auftretenden sehr verschiedenen Kraftwirkungen und Geschwindigkeiten stets die nämlichen blieben. Bei den Abwägungen der Hubwirkung kamen bezüglich des Stützpunktes der aufrechten Welle und der Wagbalken-Achse noch weitere uncontrolirbare Widerstände in's Spiel.

Eine sehr bedeutende Fehlerquelle lag auch in der Zeitmessung für den Ablauf der Gewichte und des Flügelwerkes. Der nach dem Halbsecunden-Pendel beobachtete und stets aus vielen Wiederholungen ermittelte Durchschnittswerth von t hat in den Gleichungen von A und G eine kubische, beziehungsweise quadratische Wirkung. Wie man sich durch einzelne Beispiele überzeugen kann, führt die kleinste Aenderung im Werthe von t immer schon zu einer bedeutenden Differenz im Rechnungs-Resultate. Dieser Umstand erfährt noch eine erhebliche Steigerung bei jenen Versuchen, welche mit den Flügel-flächen kleinsten Formates vorgenommen wurden und dann, um die Resultate auf $1 \square$ zu reduciren, eine Multiplication auf das 25fache erforderten.

Ferners unterlagen alle angestellten Versuche noch einer wesentlichen Schwierigkeit, welche in dem Zustande der die rotirenden Flügel umgebenden Luft lag. Die Genauigkeit der Experimente war durch eine völlig stillstehende und unbegrenzte Luftumgebung bedingt.

Es zeigte sich, dass schon der kleinste Windhauch oder Luftzug sofort störend auf die Flügelbewegung einwirkte und den Werth von t und v fühlbar änderte. Es ist dabei zu bemerken, dass die Wirkung einer von der Seite her kommenden und auf die rotirenden Flügel drückenden Luftströmung sich nicht compensirt, indem etwa der eine Flügel um ebenso viel beschleunigt, als der andere retardirt würde; die relative Geschwindigkeit der Luftströmung ist bezüglich des ihr entgegenkommenden Flügels eine andere, als bezüglich des anderen Flügels, welcher die gleiche Richtung mit der Luftströmung

verfolgt. Da nun der Factor ν nicht proportional wirkt, sondern bezüglich der zu leistenden Widerstandsarbeit in der dritten Potenz auftritt, so ist die hemmende Wirkung auf den ersten Flügel eine vielfach grössere, als die beschleunigende Wirkung auf den zweiten Flügel. Hierin liegt die Ursache der von dem Vortragenden oft beobachteten Erscheinung, dass ein rotirendes Flügelpaar durch eine seitliche Luftströmung sehr leicht zum völligen Stillstand gebracht und in diesem Zustande dauernd zu verharren gezwungen werden kann. Die allerschwächste Luftströmung muss daher schon eine Störung der Rotation und zwar im retardirenden Sinne hervorbringen.

Es war Anfangs beabsichtigt mit dem grössten, 20cm haltenden Flügelpaare in der freien Luft eines geschützt liegenden Gartens zu experimentiren, es musste aber trotz anscheinender Windstille wochenlang gewartet werden, bis die schwachen fast unausgesetzt thätigen Strömungen der freien Atmosphäre auf so lange intermittirten, dass innerhalb der Dauer einiger Minuten ein Versuch ohne ungestört gelang, um einige nahezu sichere Daten zu liefern. Später sah man sich veranlasst, den Versuchsort in den schon erwähnten grossen Saal zu verlegen. Aber auch hier mussten die vorgenommenen Versuche vor jeder störenden Luftströmung sorgfältig bewahrt werden. Diese Nothwendigkeit war hauptsächlich bei den, durch kleine Treibgewichte bewirkten, Flügelrotationen recht augenfällig, indem die beobachteten Werthe von γ stärkere Variationen zeigten. Wie bezüglich der Luftströmungen mussten die Versuche nicht weniger auch bezüglich jedes etwa in die Nähe der Flügel kommenden grösseren Gegenstandes geschützt werden, damit nicht das schon erwähnte theilweise Mitrotiren der Luft eintrete. Die unerlässliche Anwesenheit der Beobachter selbst blieb in dieser Hinsicht nicht ganz ohne erkennbaren schädlichen Einfluss. Wahrscheinlich stammen jene Differenzen, wonach der Arbeitsaufwand A und das Hubvermögen G nach den Versuchen etwas kleiner ausfielen, als die Formeln indiciren, aus dem zwischen den Flügeln eingetretenen Mitrotiren der Luft her, das, wenn auch in ganz geringem Maasse, doch stattgefunden haben dürfte.

Die Einstellung der Flügelflächen in den bestimmten Winkel α gelang bei aller Behutsamkeit doch nur mit einer mehr oder minder vollkommenen Genauigkeit. Es zeigte sich aber ausserdem der Missetand, dass die stumpferen Winkel bei Anwendung grösserer Treibkräfte und Rotationsgeschwindigkeiten die Tendenz annahmen, mittels elastischer Torsion der Flügelflächen und Flügelarme sich windschief in noch stumpfere Winkel zu deformiren. Bei den spitzen Winkeln zeigte sich die entgegengesetzte Tendenz. Die wirklich eintretenden Deformationen des Einstellungswinkels entzogen sich während der Rotation natürlich jeder Controle. Man konnte nur die Vorsicht gebrauchen, mit den Treibgewichten und Rotationsgeschwindigkeiten und ebenso mit Einstellung sehr spitzer Winkel gewisse Grenzen nicht zu überschreiten. Am sichersten gestalteten sich in letzterer Hinsicht die Experimente mit den Schiefstellungswinkeln nahe an 45° , wo die kleinsten Differenzen zwischen dem thatsächlichen Ergebnisse und den Forderungen der Formeln zum Vorschein kamen.

Endlich ist als Fehlerquelle noch die den Coëfficienten γ bestimmende Beobachtung des Barometer- und Thermometerstandes anzuführen, wovon namentlich der letztere von überwiegender Bedeutung ist. Es zeigte sich hiebei die praktische Schwierigkeit, während der Versuche allen zufälligen Schwankungen vollständig gerecht zu werden.

Wie man sieht, wirken so viele und vielerlei Ursachen auf eine geringe Ungenauigkeit der Versuchsergebnisse hin, dass ein mathematisch, präzises, stetiges Zusammentreffen der bezüglichen Daten gar nicht erwartet werden kann und demnach können auch die, in der über die Versuche aufgestellten Tabelle verzeichneten Differenzen zwischen den theoretischen und empirischen Ergebnissen nicht als bedenklich für die aufgestellten Formeln angesehen werden, sondern müssen lediglich als die Folge der in den Apparaten und Manipulationen gelegenen Unvollkommenheiten hingenommen werden.

Diese Differenzen könnten gewiss nicht so geringe und insbesondere nicht solche constant gering bleibende sein, wenn zwischen dem Naturgesetze und den für dieses aufgestellten Formeln ein principieller Unterschied wäre.

Da bei den Versuchen Flügelflächen von 0.017 bis 20cm Flächeninhalt, also mehr als mit hundertfacher Grössenvariation und Treibgewichte von 50g bis 30.000g , also mit 600 facher Variation, mit den Schiefstellungen von 90° bis 10° in Combination gebracht worden sind, so hätte der geringste analytische oder principielle Fehler in der Ableitung der Formeln zu sehr weit ausgreifenden und die Resultate total umwandelnden Differenzen führen müssen.

Hienach können die Gleichungen

$$A = \nu^3 F \sin^2 \alpha \frac{\gamma}{g}$$

und

$$G = \nu^2 F \sin \alpha \cos \alpha \frac{\gamma}{g}$$

als der richtige Ausdruck aller zwischen F , α , A , ν und G bestehenden Relationen nicht weiter angezweifelt werden und müssen sammt dem einfachen Coëfficientenwerthe $\frac{\gamma}{g}$ als die nothwendige physikalisch mathematische Formulirung eines wirklich bestehenden Naturgesetzes gelten.

Der Vortragende ist durch die Einfachheit dieser Grundformeln selbst überrascht. Er hatte namentlich nicht erwartet, dass die in Bezug auf Flächengrösse und Format als nicht variabel gefundene Function $\frac{\gamma}{g}$ nun auch bezüglich der Werthe α und A keines von diesen abhängigen variablen Zusatz-Coëfficienten bedürfe, sondern für sich allein genüge.

Damit schliesst der Vortragende die theoretische und experimentelle Entwicklung der primären Grundformeln der Aerodynamik und behält sich vor, später einmal einen weiteren Theil seiner Studie, nämlich die aus den gefundenen Formeln resultirenden Forderungen und Constructionsregeln, zu veröffentlichen.

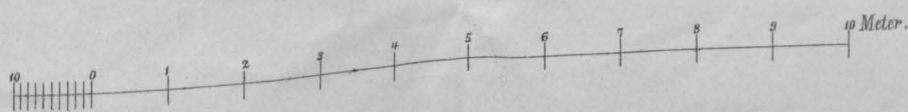
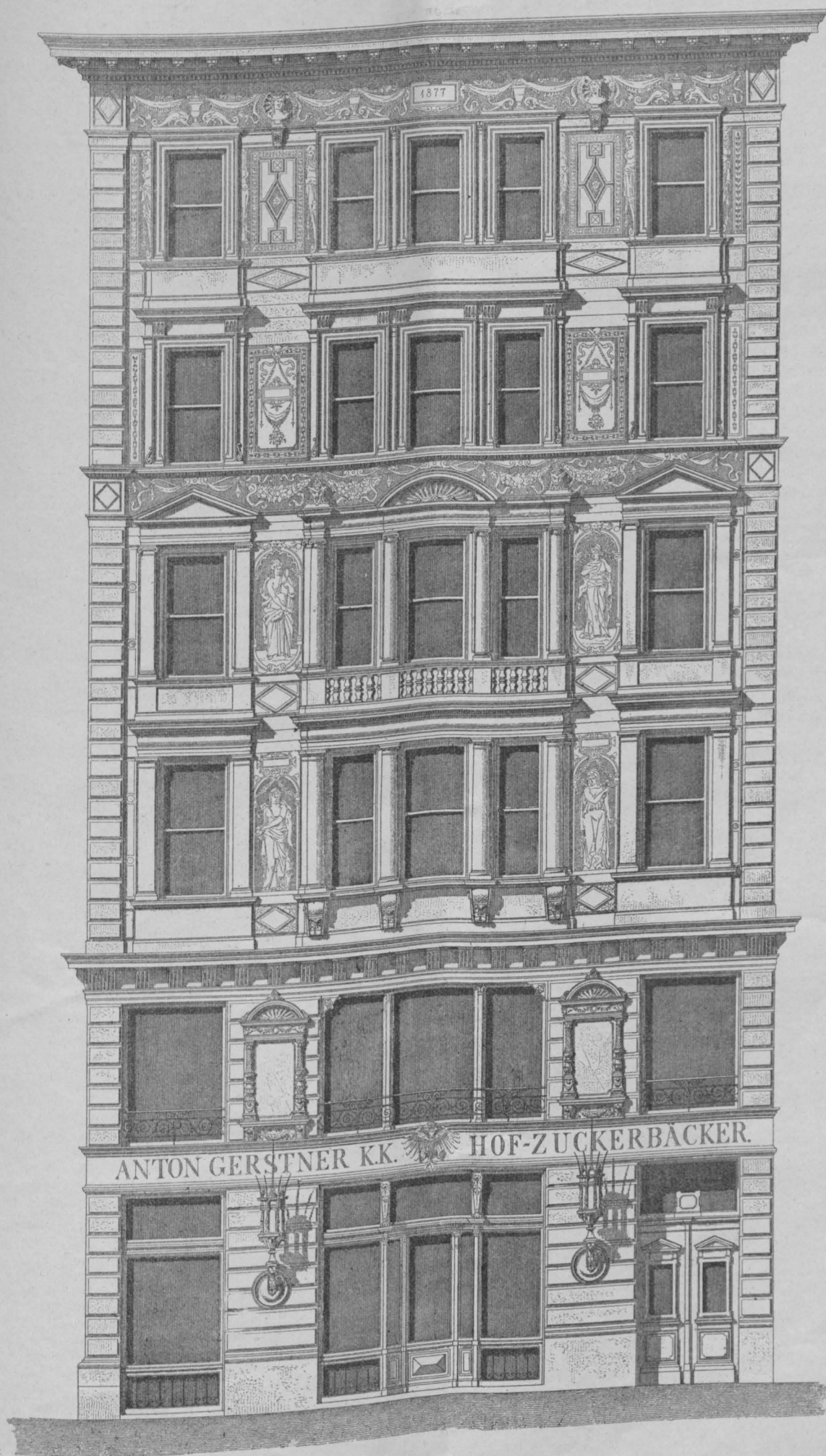
Berichtigung.

In dem in Heft IV abgedruckten Aufsätze „Umsteuerung mit Schleifenmechanismus und variabler Expansion“ sind über Wunsch des Herrn Autors folgende Manuscriptfehler zu berichtigen. Auf Seite 102 linke Spalte, Zeile zwei von unten soll es heissen: „worin e eine Constante, welche der Entfernung $O_1 N$, d. i. des Angriffspunktes der Excenterstangen von der Projection der Excenter-Kurbelstellung entspricht, bezeichnet“. — Seite 102, rechte Spalte ist in den Gleichungen 4), 6), 7), 8), 9) statt des letzten Gliedes „ ν “ „ e “ zu setzen, ebenso in Gleichung 12) auf Seite 103.

HAUS DES HERRN A. GERSTNER

I. Kärntnerstrasse in Wien.

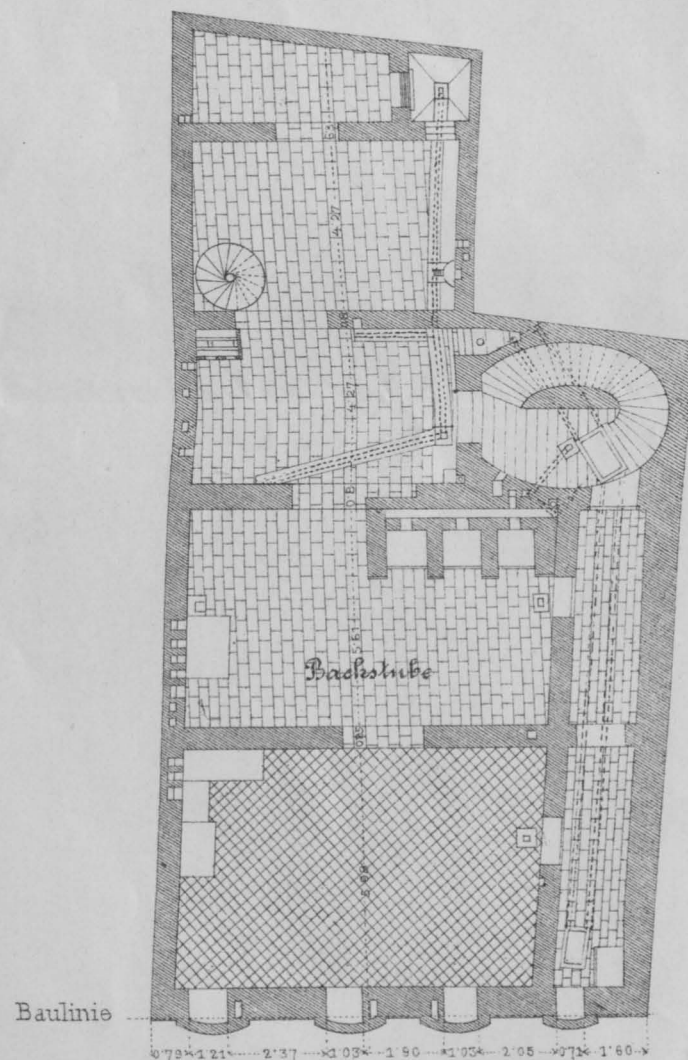
Architekt: Julius Dörfel.



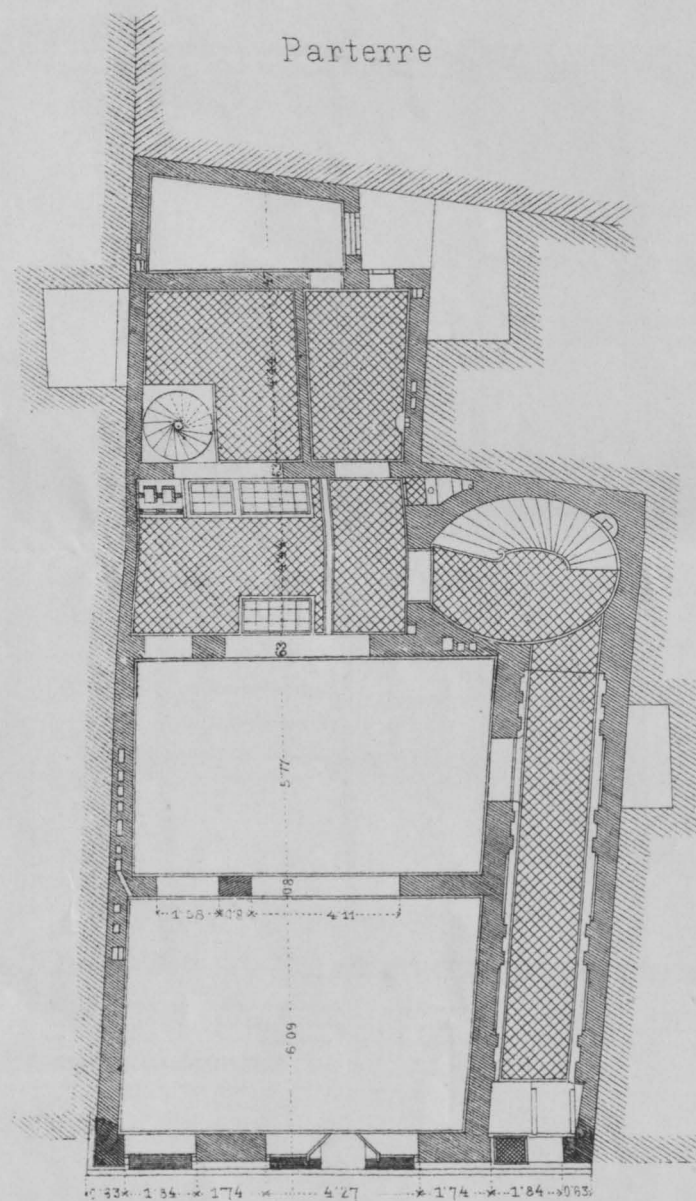
HAUS DES HERRN A. GERSTNER

I. Kärnthnerstrasse in Wien
 ARCHITEKT JULIUS DÖRFEL.

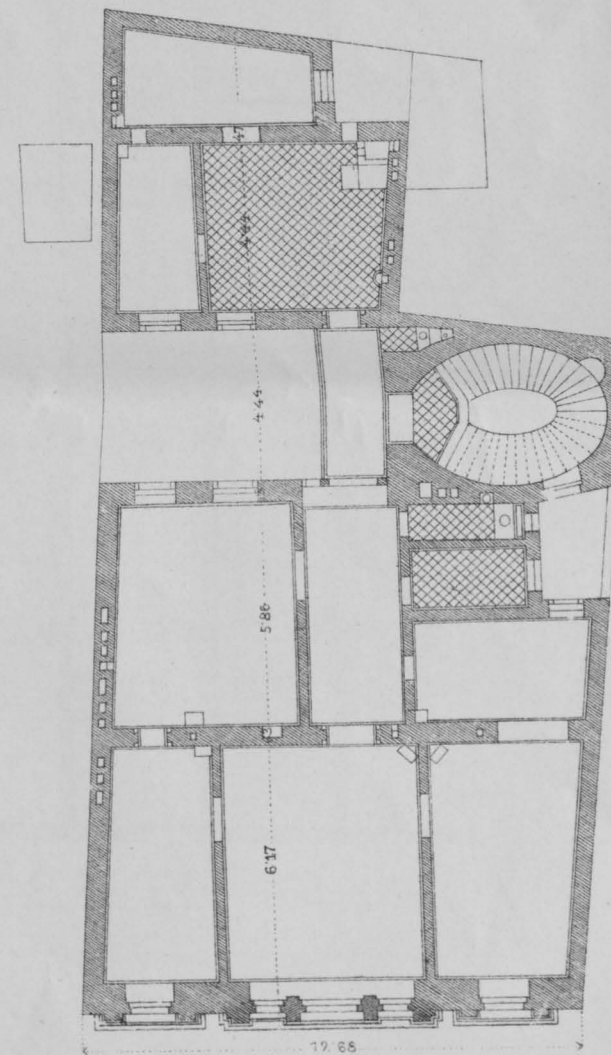
Souterrain



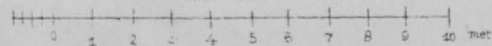
Parterre



1.2.3 u 4 Stock



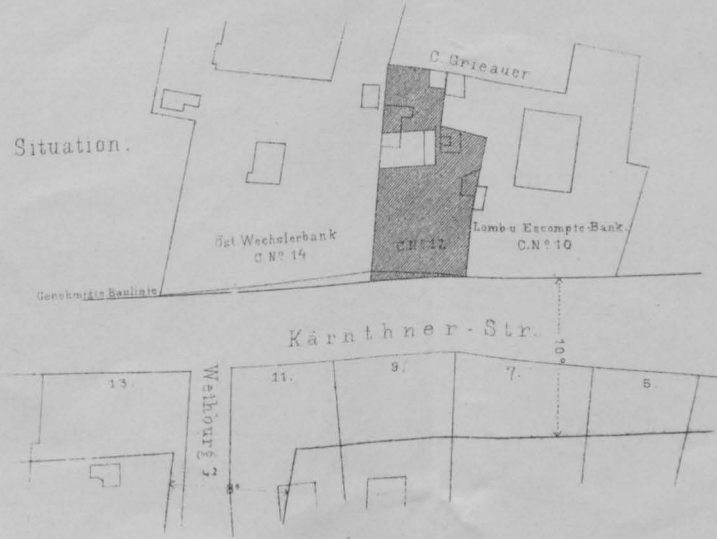
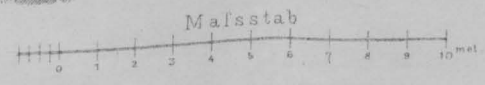
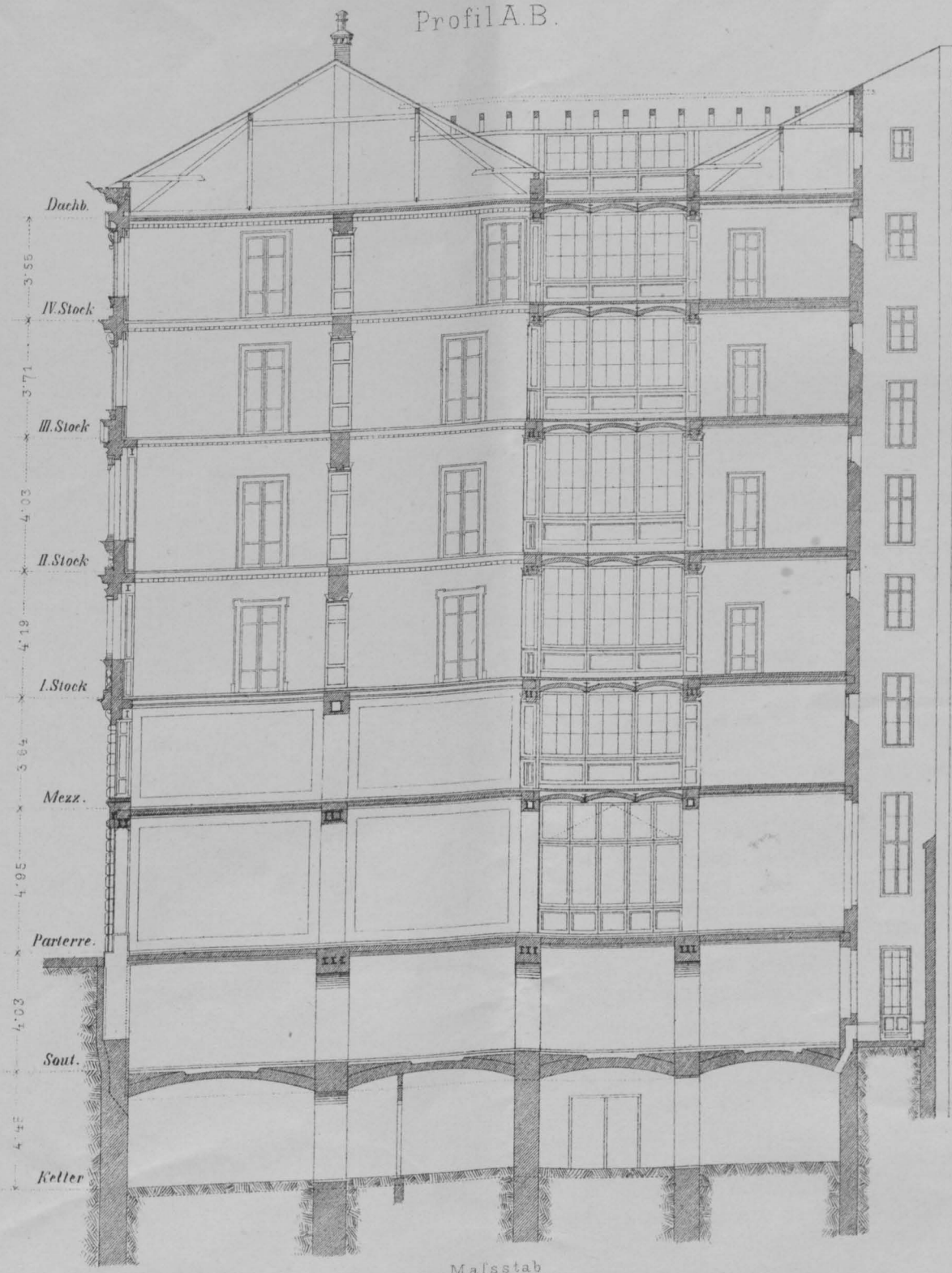
Maßstab



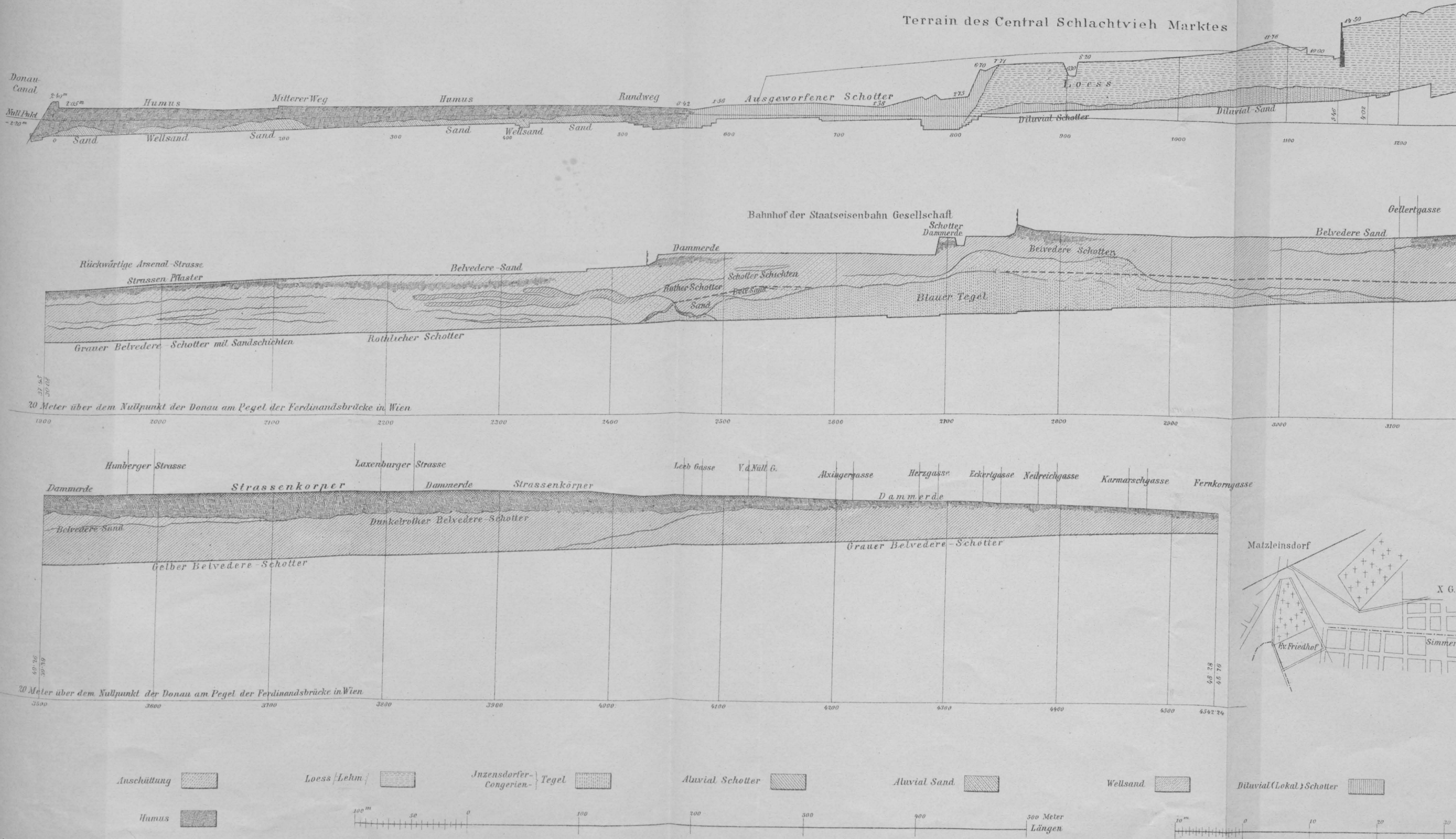
HAUS DES HERRN A. GERSTNER

I. Kärnthnerstrasse in Wien
ARCHITEKT JULIUS DÖRFEL.

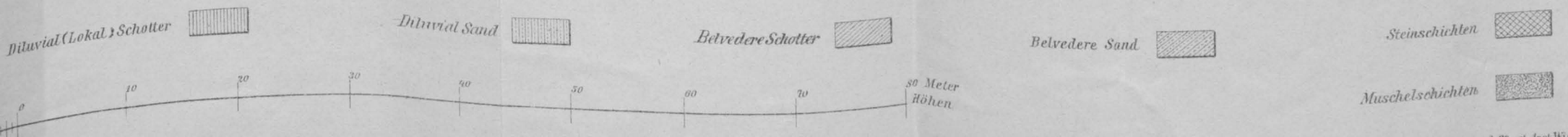
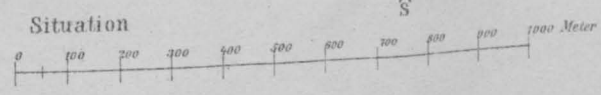
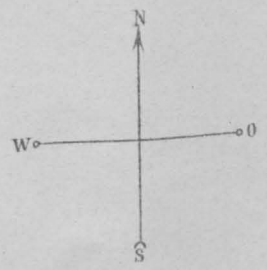
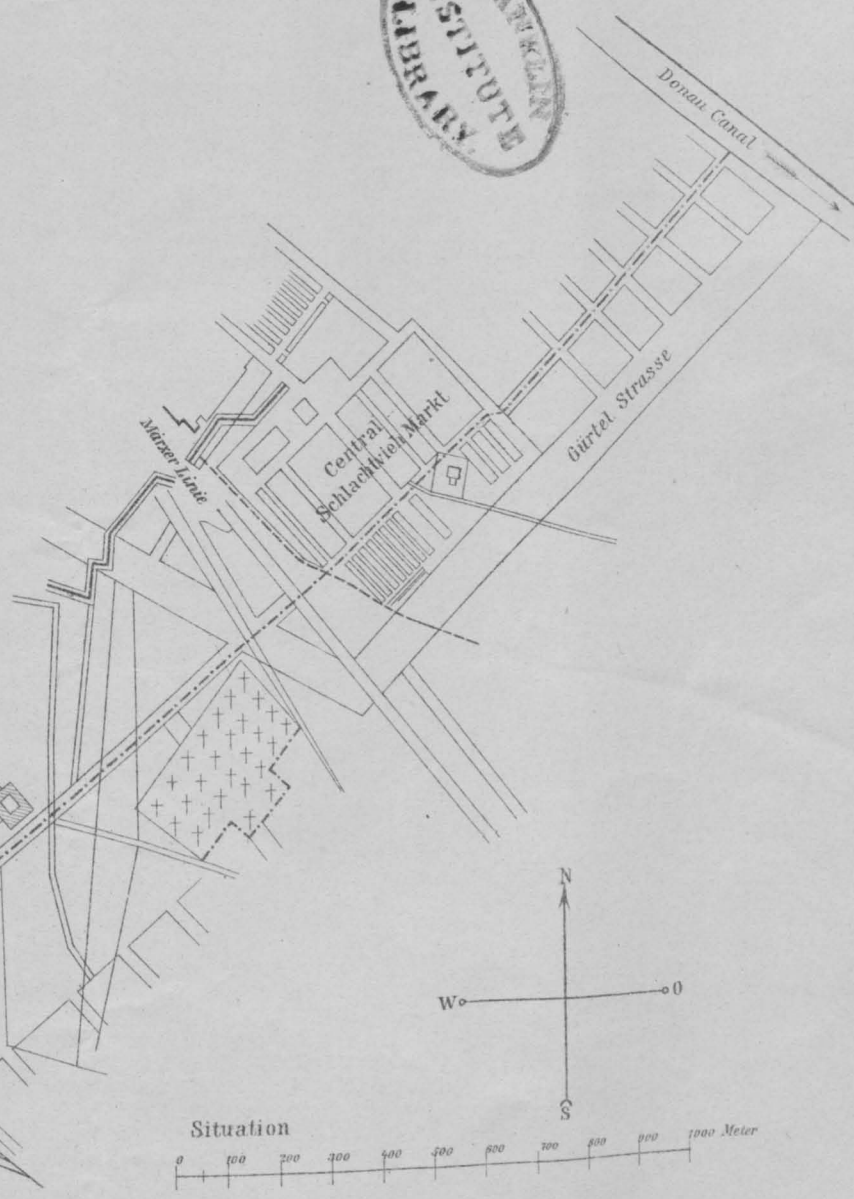
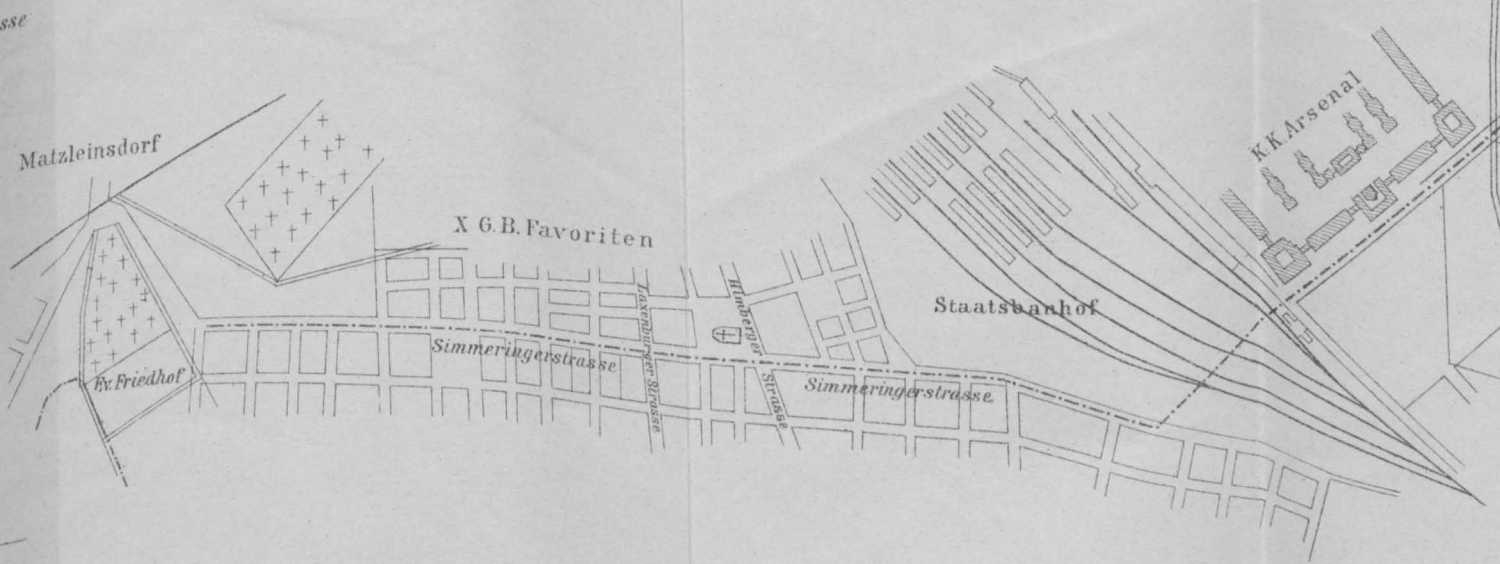
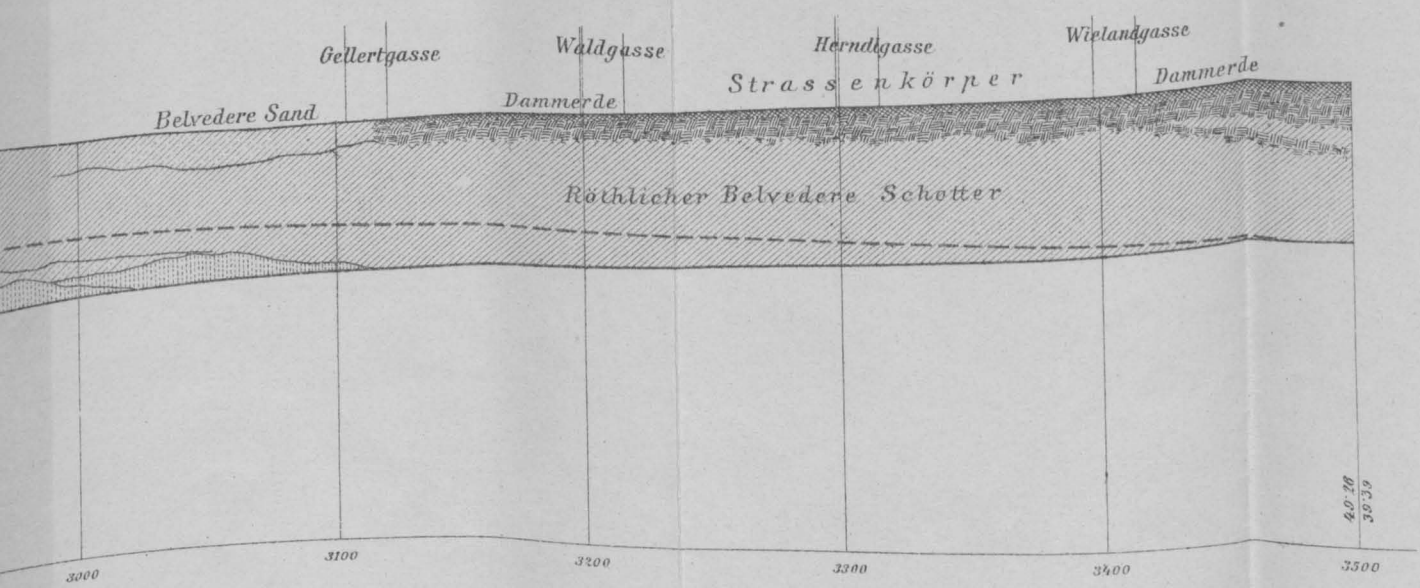
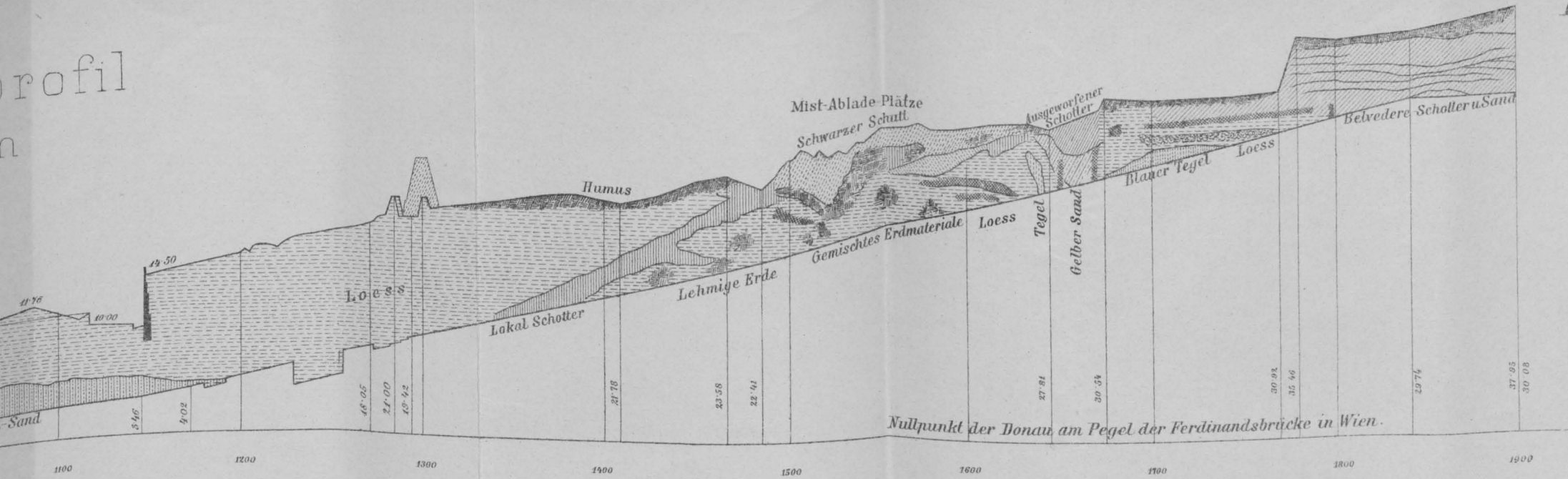
Profil A.B.



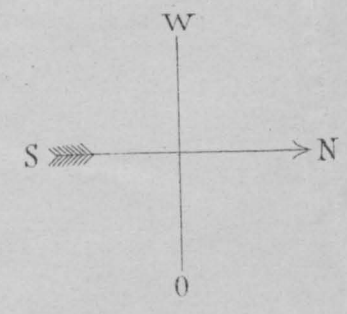
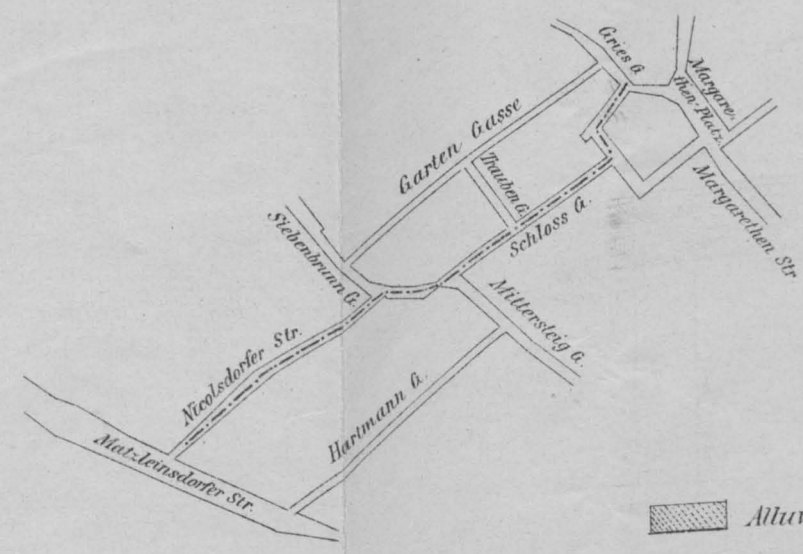
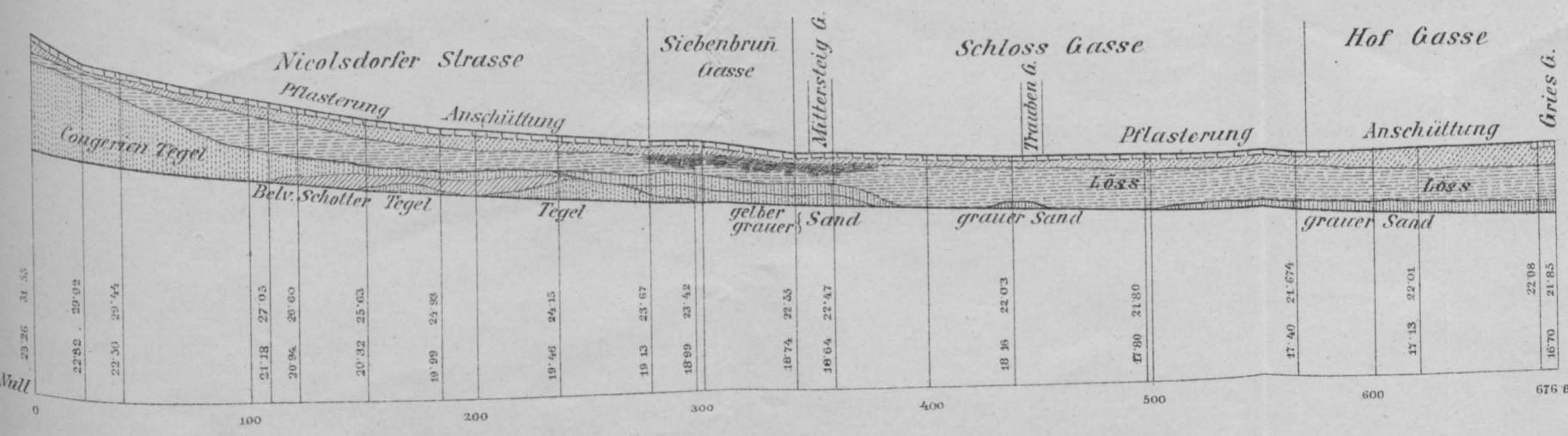
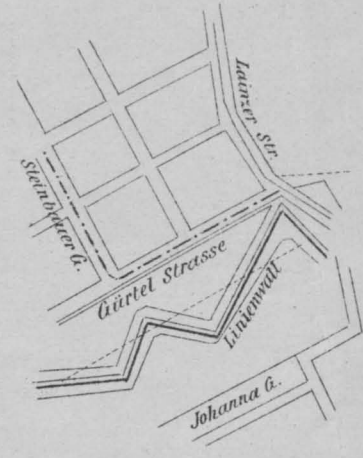
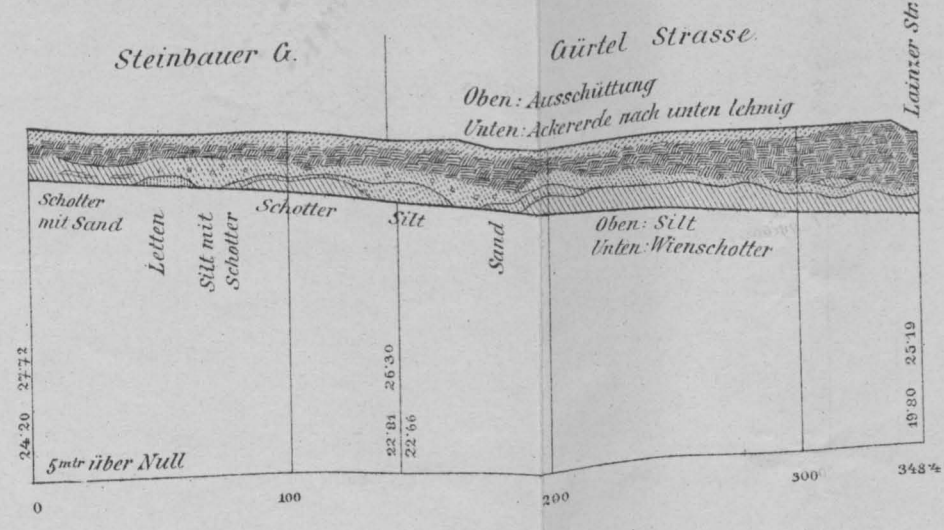
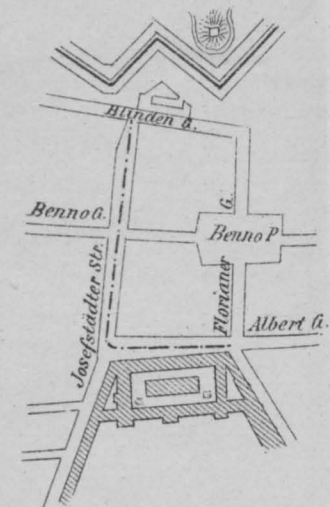
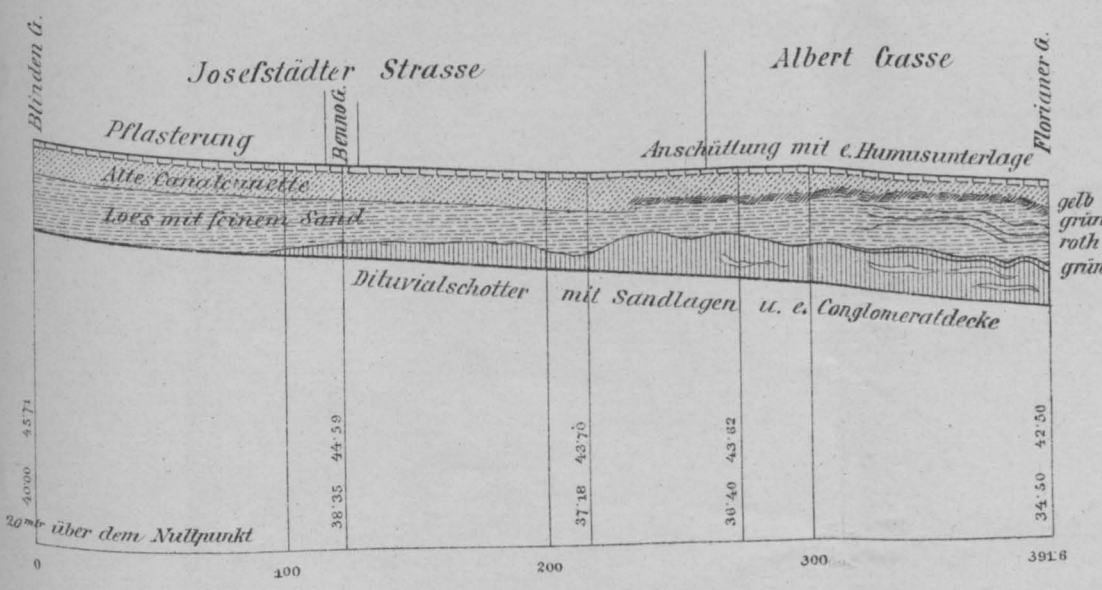
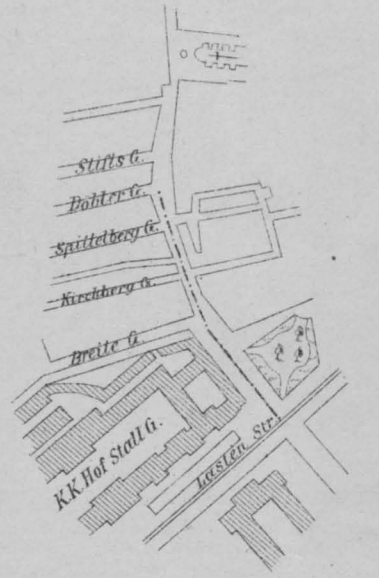
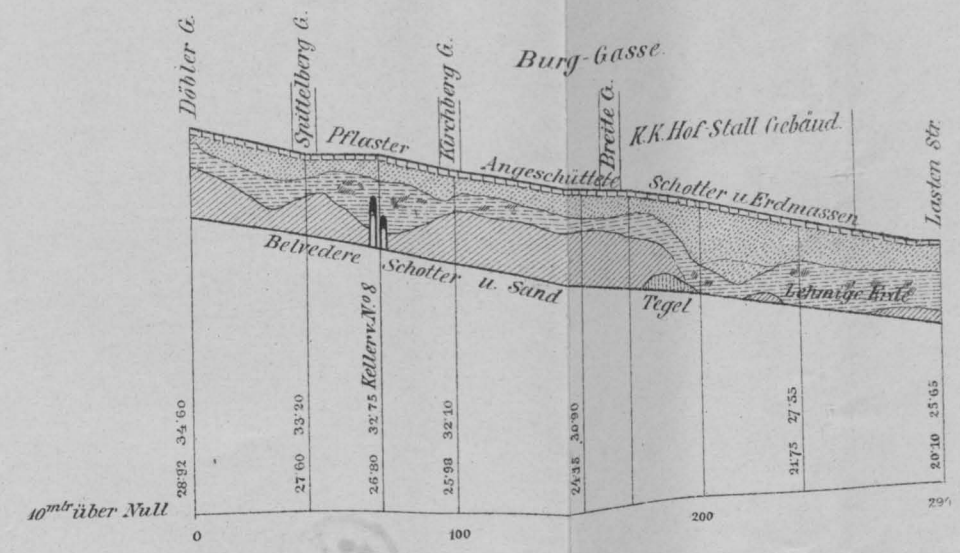
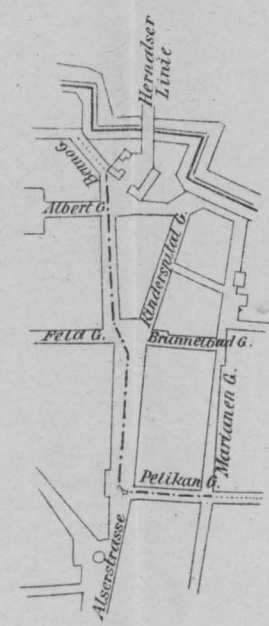
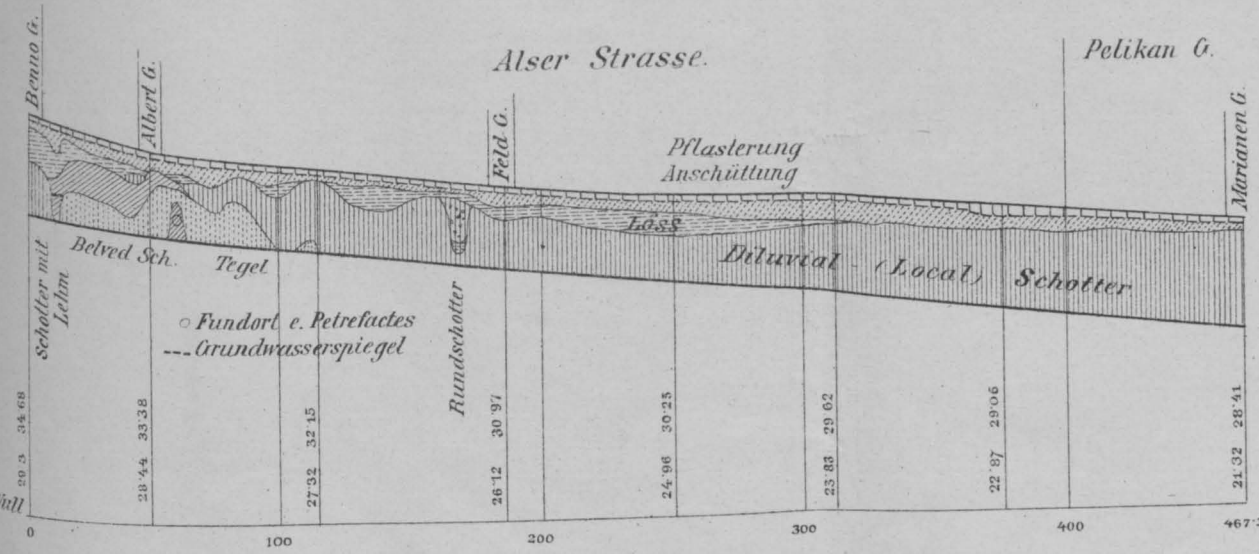
Geologisches Längenprofil Sammelkanal Favoriten Wien.



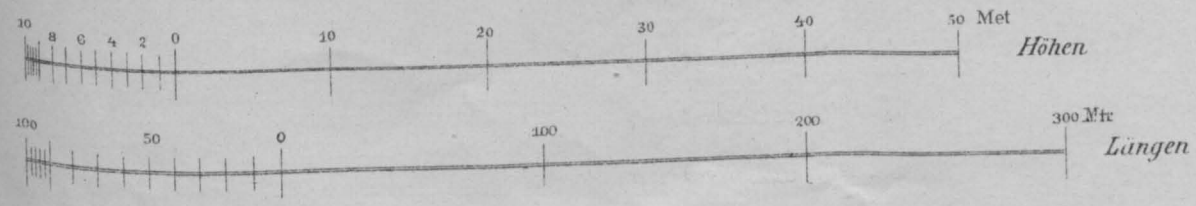
profil
n



Geologische Profile von Kanälen in Wien.



Die Höhennoten beziehen sich auf den Nullpunkt des Pegels der Ferdinandsbrücke



- Anschüttungen
- Humus (Ackererde)
- Löss (Lehm)

- Alluvial-Schlamm, Silt
- Diluvial (Local) Schotter
- Diluvial-Sand
- Belveder-Schotter
- Belveder-Sand
- Congerien- (Inzersdorfer) Tegel
- Alluvial-Schotter
- Alluvial-Sand

EISERNER EISENBAHNWECHSEL MIT VERBESSERTER SICHERHEITS-VORRICHTUNG

PATENT CLEMENT.

Fig. 1, Seitenansicht.

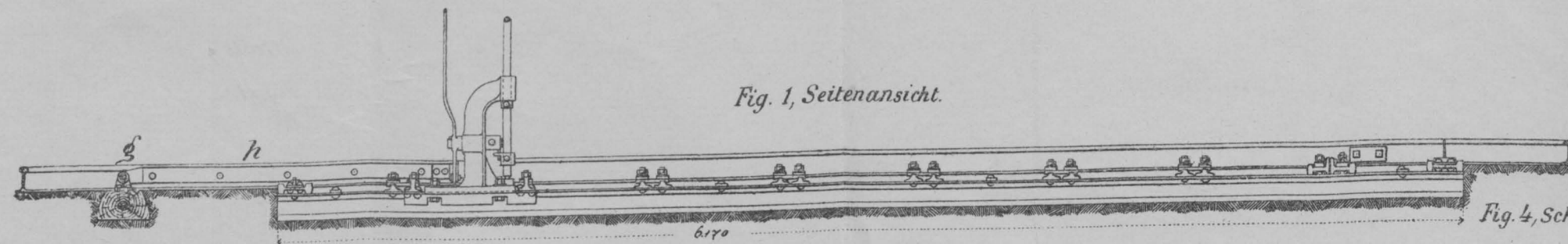


Fig. 2, Draufsicht.

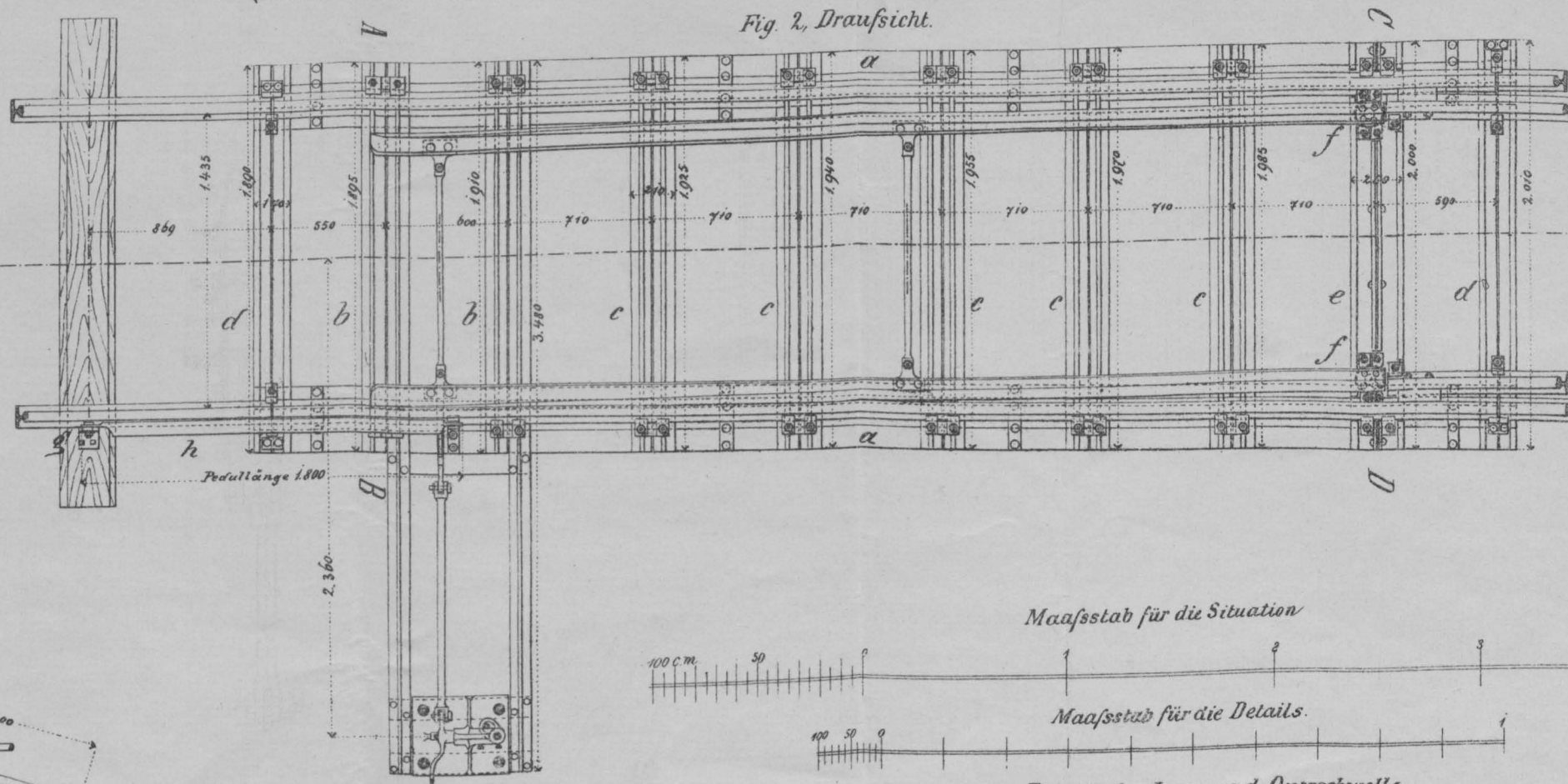


Fig. 4, Schnitt CD.



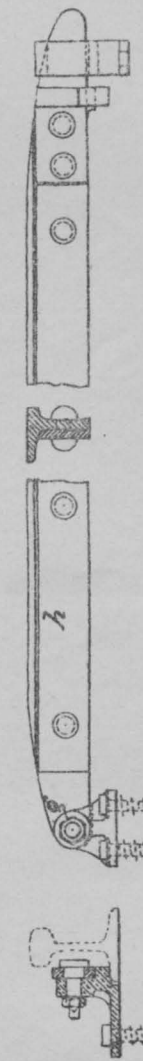
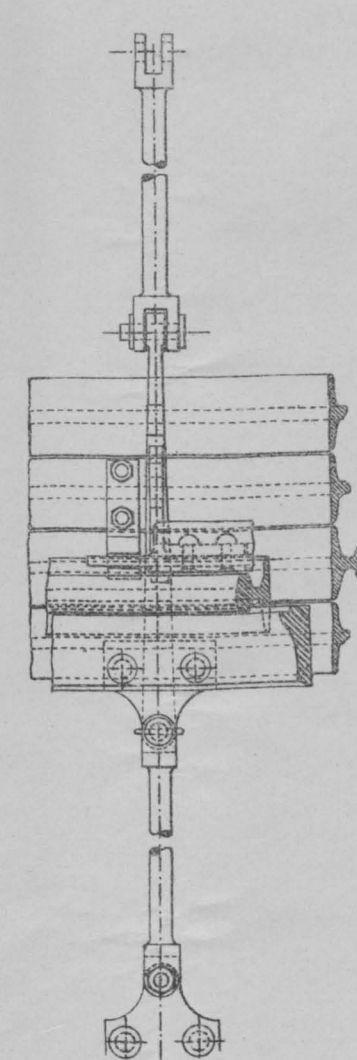
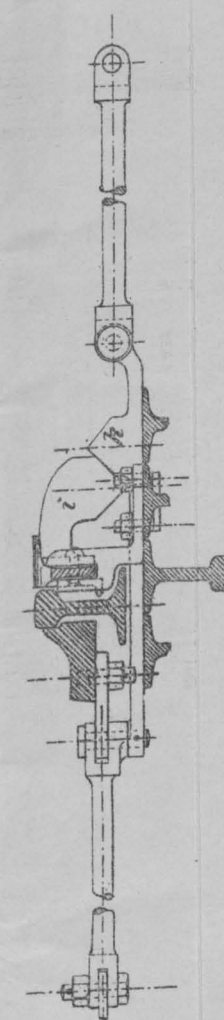
Details der Sicherheitsvorrichtung

Fig. 11.

Fig. 12.

Pedal

Fig. 13.



Details der Wurzelbefestigung

Fig. 8 Schnitt AB

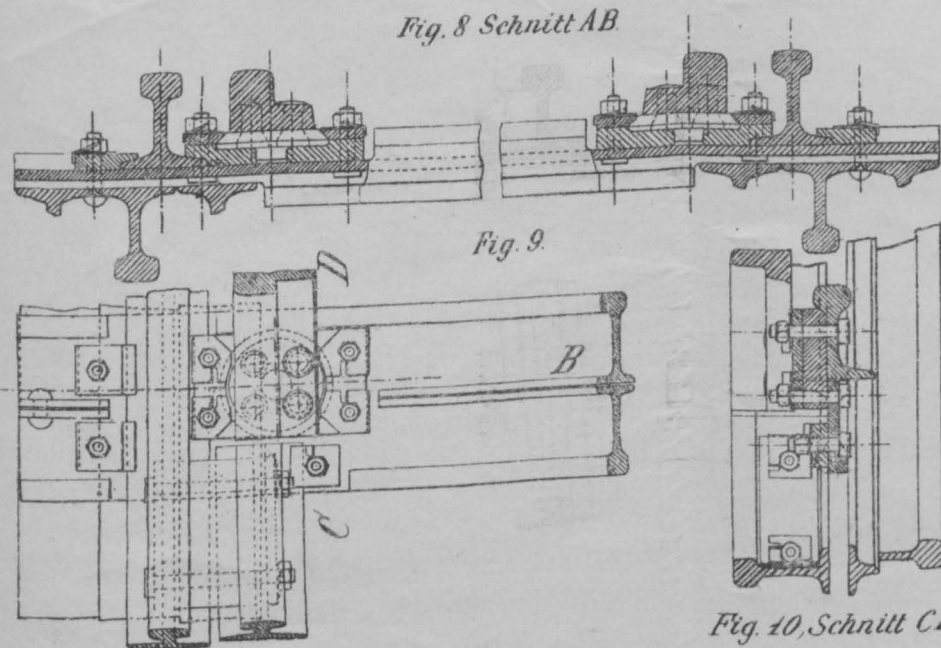


Fig. 9.

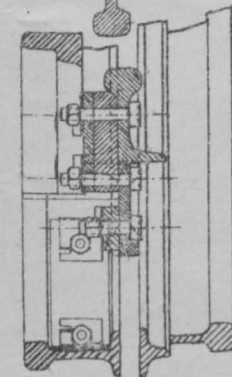
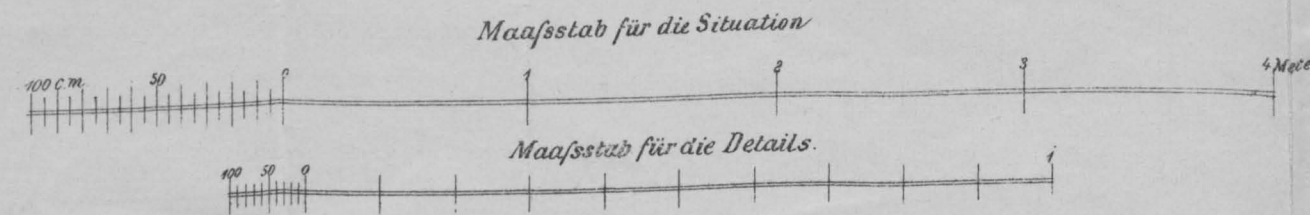


Fig. 10, Schnitt CD.



Maafsstab für die Details.

Fig. 5.

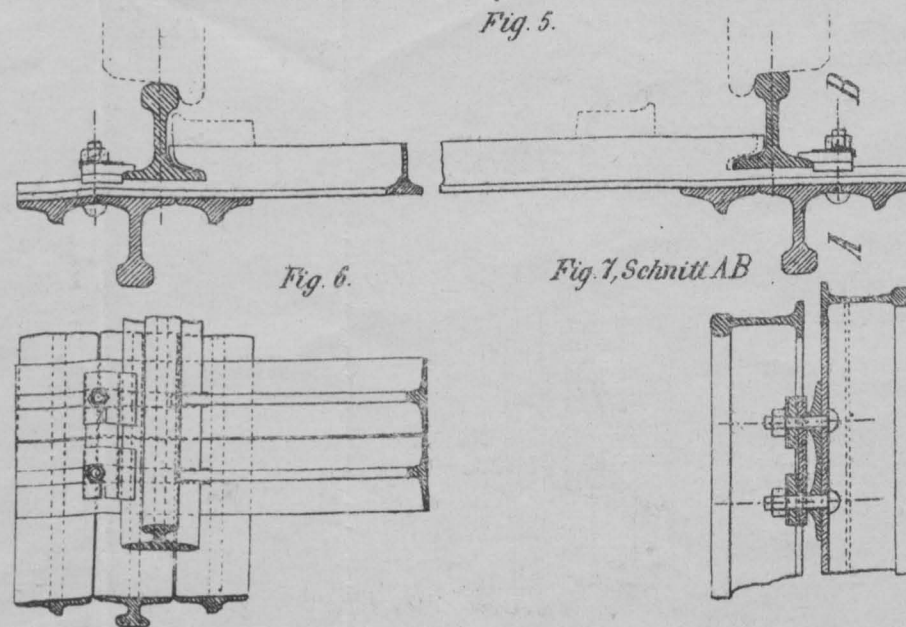


Fig. 6.

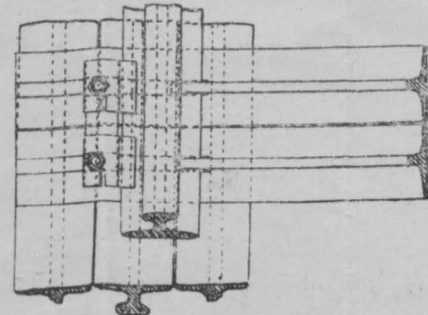
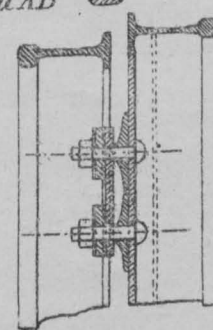


Fig. 7, Schnitt AB



Eiserne Weichenschwelle
des Kreuzungseleises.

Fig. 15.

Schnitt A.B.

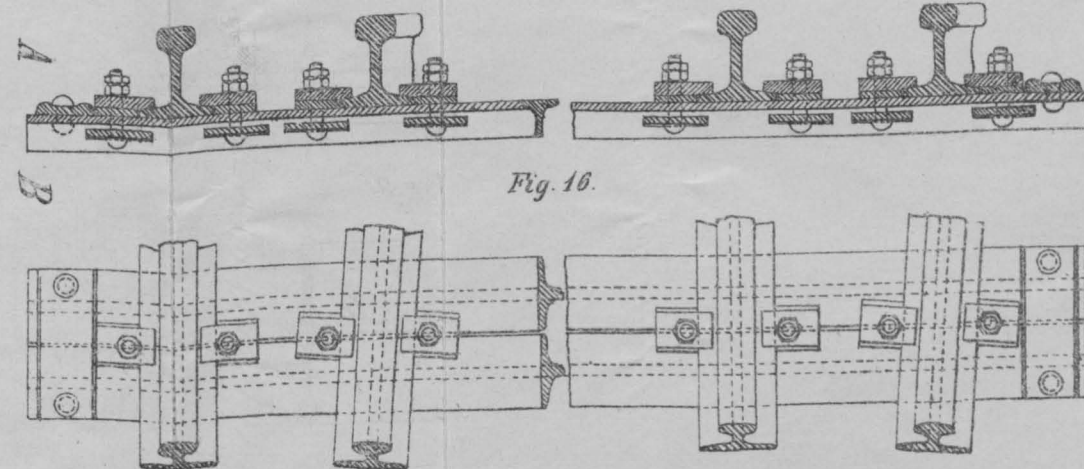


Fig. 16.

